UNIVERSITÉ DE NANTES

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE STIM

Année 2012

MOUVEMENT BROWNIEN APPLIQUÉ À L'ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE DES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOLOMORPHES

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Géométrie

Présentée et soutenue publiquement par :

Nicolas HUSSENOT DESENONGES

Le 13 décembre 2012, devant le jury ci-dessous :

Président : Frank Loray, université de Rennes, directeur de recherches au CNRS
Rapporteurs : Bertrand Deroin, chargé de Recherches première classe, Paris 11
Xavier Gómez-Mont, professeur, CIMAT (Guanaruato)
Examinateurs : Vincent Colin, professeur à l'Université de Nantes
Peter Haissinsky, professeur à l'Institut de Mathématiques de Toulouse
Gaël Meigniez, professeur à l'université de Bretagne Sud
Laurent Meersseman, université de Bourgogne

Directeurs de Thèse : Gaël Meigniez
Vincent Colin

Remerciements

En premier lieu, je remercie très chaleureusement mon directeur de thèse, Gaël Meigniez. Sur le plan mathématique, je suis toujours impressioné par son enthousiasme communicatif et la profusion de ses idées souvent originales. La thèse est aussi une aventure humaine. Gaël a toujours su m'encourager avec l'intelligence et la gentillesse dont il sait faire preuve. Un grand merci !

Le cours de master 2 de Vincent Colin sur les structures de contact m'a donné l'envie de faire de la recherche. Merci également d'avoir supervisé mon travail pendant ces années et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Frank Loray a accepté de présider le jury. Je lui en suis très reconnaissant ainsi que pour m'avoir accueuilli à deux reprises pour des journées de travail qui furent très enrichissantes.

Il y a un an et demi, alors que je piétinais dans mes recherches, Bertrand Deroin me posait une question sur le prolongement analytique d'applications d'holonomie le long d'un brownien. La réponse innatendue à cette question est à l'origine de la deuxième partie de cette thèse et je l'espère d'encore de nombreuses recherches. Bertrand a été d'une aide précieuse à différents moments de ma recherche, je lui en suis très reconnaissant. Je le remercie également d'avoir accepté d'être rapporteur et membre du jury.

Je remercie Xavier Gomez-Mont d'avoir accepté d'être rapporteur. Egalement un grand merci à Laurent Meersseman et Peter Haïssinsky d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Frédéric Mathéus m'a suivi tout au long de ma thèse avec bienveillance. Il aura été à la fois un cobureau des plus agréables, un relecteur attentif, un enseignant passionné (il m'a appris tout ce que je sais des marches aléatoires et bien d'autres choses), et finalement un ami sincère. Merci infiniment.

J'en profite pour remercier également tous les membres du laboratoire de Vannes pour l'ambiance si agréable qui y règne. Sylvain, le foot, le roller, et les guiness du paddy vont me manquer.

J'ai commencé ma thèse en même temps que Simon et Carlos et nous la finissons quasiment au moment. Nous avons partagé des moments inoubliables de joie comme de doute. Je joins à ces remerciements tous les doctorants de Nantes et de Vannes.

J'ai eu la chance, pendant mes années de thèse, de partager un toit avec de nombreux amis. Mélanie, Bérengère, Carlos, Aurélie, Gladys, Guillaume, Sophie, Jibé, Clothilde, Antoine, Nathalie, Thibaut, Tonio et Camille, merci à vous de m'avoir hébergé si chaleureuseument, d'avoir supporté mon sens du rangement quelque peu approximatif et d'avoir égayé mon quotidien.

Mes dernières pensées vont à la Hussenot team (mes parents, Clothilde, Geoffroy, Grégoire et Etienne) qui est à mes côtés depuis toujours.

Table des matières

1 Introduction

Dans cette thèse, je me suis intéressé à la dynamique des feuilletages transversalement holomorphes avec une approche probabiliste, plus précisément à l'aide du mouvement brownien.

Tenter d'obtenir des informations sur la dynamique d'un feuilletage à l'aide du mouvement brownien n'est pas une nouveauté. En effet, en considérant un brownien le long des feuilles dans une variété feuilletée, Lucy Garnett ([Ga]) a défini des mesures sur cette variété appelées mesures stationnaires ou harmoniques : ce sont des mesures de probabilité invariantes par l'opérateur de diffusion associée au noyau de la chaleur le long des feuilles.

Cette théorie peut être pensée commme une généralisation de la théorie des marches aléatoires dans les groupes : en effet, étant donné un groupe G d'homéomorphismes d'une variété X, et μ une mesure de probabilité sur G, on peut construire des mesures ν sur X (appelées mesures μ-stationnaires ou μ-harmoniques) qui permettent d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique de l'action sur X d'une large composition d'éléments de G choisis indépendament les uns des autres et suivant la loi μ. De la même manière, on aurait envie, pour comprendre la dynamique d'un feuilletage, de munir d'une mesure de probabilité μ le pseudogroupe d'holonomie du feuilletage et de définir des mesures μ-stationnaires. C'est en quelque sorte ce que font les mesures harmoniques de Lucy Garnett. Citons le travail de Sébastien Alvarez [Al] qui établit, dans le cas de certains fibrés feuilletés, une correspondance bijective entre les mesures harmoniques au sens de Garnett et les mesures sur la fibre qui sont μ-stationnaires pour une certaine mesure de probabilité μ sur le groupe d'holonomie de la fibre.

L'approche de Garnett a notamment servi à Etienne Ghys pour démontrer un résultat remarquable ([Gh]) : soit $\mathscr{F}$ un feuilletage orientable de dimension 2 sur une variété compacte. Alors la réunion des feuilles qui sont compactes ou difféomorphes à l'une des 6 surfaces suivantes (plan, monstre du Loch-Ness, cylindre, échelle de Jacob, arbre de Cantor, arbre de Cantor fleuri) est un borélien de mesure totale pour toute mesure harmonique (définie à partir de n'importe quelle métrique le long des feuilles).

Dans le cas particulier des feuilletages transversalement holomorphes, Bertrand Deroin et Victor Klepstyn montrent dans ([DK]), en utilisant la théorie de L. Garnett une propriété d'attraction des feuilles vers les ensembles minimaux du feuilletage. Plus précisément, pour un feuilletage transversalement holomorphe d'une variété compacte M, on a la dichotomie suivante :

1. Soit il existe une mesure transverse invariante
2. Soit il existe un nombre fini d'ensembles minimaux $\mathscr{M}_1, ..., \mathscr{M}_k$ et un nombre fini de mesures de probabilités $\nu_1, ..., \nu_k$ supportées par ces ensembles minimaux tel que l'on ait : pour tout x dans M et presque toute trajectoire brownienne ω partant de x, ω tend vers l'un des $\mathscr{M}_j$ et se distribue sur $\mathscr{M}_j$ avec la mesure ν_j au sens où :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\omega_* leb_{[0,t]} = \nu_j$$

($leb_{[0,t]}$ est la mesure de Lebesgue de l'intervalle [0,t])

Contrairement aux travaux cités plus haut, dans mon travail, j'ai tenté d'obtenir des informations sur la dynamique du feuilletage en considèrant un mouvement brownien non pas tangent aux feuilles mais transverse à celles-ci. Cette thèse est constitué de deux parties :

1. dans la première partie, je m'intéresse aux composantes de Fatou et Julia d'un feuilletage transversalement holomorphe d'une variété compacte M. J'y démontre un résultat concernant l'accumulation des feuilles du Fatou sur l'ensemble de Julia. La preuve repose sur la projection du mouvement brownien dans M sur l'espace des feuilles.
2. dans la seconde partie, je m'intéresse aux structures projectives complexes et plus particulièrement au prolongement analytique (le long d'une trajectoire brownienne) de germes de sections locales de l'application développante associée à une structure projective. Les résultats obtenus s'appliquent à l'étude de certains feuilletages holomorphes, les feuilletages dits de type Riccati.

La première partie s'intéresse donc aux composantes de Fatou et Julia d'un feuilletage transversalement holomorphe $\mathscr{F}$ d'une variété compacte M. Celles-ci ont été définies par Etienne Ghys, Xavier Gomez-Mont et Jordi Saludes dans [GGS]. Dans leur article, ils partitionnent M en un ouvert saturé appelé ensemble de Fatou et un fermé saturé appelé ensemble de Julia. Cette décomposition rajoute une colonne dans le dictionnaire de Sullivan [S] qui établit des connexions entre d'une part les ensembles de Fatou et Julia au sens classique et d'autre part les ensembles limites et de discontinuité associés à l'action d'un groupe kleinien sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Notons également que Taro Asuke définit dans [As] des composantes de Fatou et Julia d'un feuilletage transversalement holomorphe d'une manière un peu différente.

Rentrons plus en détail dans l'article [GGS] : soit M une variété compacte connexe munie d'un feuilletage transversalement holomorphe. L'ensemble de Fatou est défini comme l'ensemble des points x appartenant à M tels qu'il existe un champ de vecteurs normal (une section du fibré normal au feuilletage), basique (constant le long des feuilles) et non nul en x (nous reviendrons plus tard sur la régularité exigée sur le champ de vecteurs : suffisamment pour être intégrables mais pas trop non plus afin que le Julia soit le plus petit possible). L'ensemble de Fatou est donc un ouvert saturé. Son complémentaire est appelé ensemble de Julia. Il est alors facile de démontrer (en intégrant ces champs de vecteur basiques normaux non nuls) que chaque composante du Fatou a une propriété d'homogénéité : étant donnés x_1 et x_2 deux points appartenant a une même composante connexe du Fatou, il existe un homéomorphisme de M envoyant x_1 sur x_2 et préservant (globalement) le feuilletage. Cette propriété d'homogénéité permet de montrer, en s'inspirant de la théorie de Molino ([Mo]), qu'une composante connexe F de l'ensemble de Fatou est de l'un des trois types suivants (voir théorème (2.6)) :

1. une composante errante : les feuilles de $\mathscr{F}$ sont fermées dans F
2. une composante semi-errante : les fermetures des feuilles de $\mathscr{F}$ forment un feuilletage de codimension 1 réel qui fibre au dessus d'une variété de dimension 1.
3. une composante dense : toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont denses dans F

Dans ce travail, nous nous intéressons plus spécialement au cas d'une composante errante de l'ensemble de Fatou. Ghys, Gomez-Mont et Saludes montrent que si F est une telle composante de l'ensemble de Fatou, alors l'espace des feuilles est une surface de Riemann analytiquement finie (voir (2.7)). Munissons M d'une métrique et considérons le mouvement brownien associé à cette métrique et partant d'un point de F. Définissons alors la mesure μ sur ∂F comme la mesure de sortie de F du mouvement brownien. Rappelons enfin qu'une variété feuilletée est dite minimalisable si il existe une métrique sur celle-ci telle que toutes les feuilles soient des sous-variétés immergées minimales. Le résultat principal de cette partie s'énonce alors ainsi :

Théorème 1.1. *Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété compacte munie d'un feuilletage transversalement holomorphe et minimalisable. Soit F une composante er-*

rante de l'ensemble de Fatou. Alors, μ-presque tout point de ∂F est un point d'accumulation de chacune des feuilles de F.

Remarques 1.2. 1. *L'hypothèse de minimalisabilité du feuilletage est essentielle dans notre preuve mais il est tout à fait possible que la conclusion du théorème soit encore vraie sans faire cette hypothèse. Cette hypothèse n'est cependant pas si restricive qu'on pourrait croire : par exemple, un feuilletage sans mesure transverse invariante est minimalisable. Cette propriété est une conséquence de la caractérisation des feuilletages minimalisables de Sullivan : un feuilletage est minimalisable si aucun cycle feuilleté ne peut être approché arbitrairement près par des p-homologies tangentes (voir [S2] ou [CC1] pour plus de précisions).*

2. *On peut montrer directement que toute feuille de F s'accumule sur ∂F (sans l'hypothèse de minimalisabilité). En effet, si L est une feuille de F, il n'est pas difficile de se convaincre que si L ne s'accumule pas sur ∂F, alors L est compact. Or d'après le théorème de stabilité globale de Reeb (également valable pour les feuilletages de codimension 1 complexe [B]), comme L est sans holonomie, cela implique que toutes les feuilles sont compactes et sans holonomie. Il apparait alors clairement que $F = M$.*

3. *Voici les grandes lignes de la preuve (une preuve complète sera donnée plus loin) : on définit un mouvement brownien sur M partant d'un point $x_0 \in F$. En utilisant l'hypothèse de minimalisabilité du feuilletage, on montre qu'un choix convenable de métriques sur M et sur le quotient $\Sigma := F/\mathscr{F}$ fait de la projection $p : F \to \Sigma$ un morphisme harmonique. Une telle application préservant le brownien, il ne reste plus qu'à utiliser la récurrence du brownien sur Σ pour conclure.*

Dans la deuxième partie de cette thèse, je me suis intéressé aux structures projectives complexes branchées. Si Σ est une surface de Riemann, une structure projective branchée sur Σ est la donnée d'un atlas sur Σ dont les cartes sont des applications holomorphes non constantes vers des ouverts de $\mathbb{P}^1$ et dont les changements de carte sont des restrictions de biholomorphismes de $\mathbb{P}^1$, c'est à dire d'éléments de $PSl(2,\mathbb{C})$. A toute structure projective, on associe une application développante $\mathscr{D} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^1$ et un morphisme

$\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSl(2, \mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall x \in \tilde{\Sigma}, \forall \alpha \in \Pi_1(\Sigma), \mathscr{D}(\alpha.x) = \rho(\alpha).\mathscr{D}(x)$$

L'application ρ est appelée représentation de monodromie et $\rho(\Pi_1(\Sigma))$ est appelé groupe de monodromie.

Dans [CDFG], les auteurs se sont intéressés au prolongement analytique de germes de sections locales de $\mathscr{D}$ le long de chemins dans $\mathbb{P}^1$. Ils montrent que si le groupe de monodromie est dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$ et si h est un germe de section locale de $\mathscr{D}$, alors l'ensemble des points singuliers pour le prolongement analytique de h est $\mathbb{P}^1$ tout entier (voir la proposition (6.3)).

J'ai tenté de démontrer une version brownienne de cette proposition. Plus précisément, je me suis posé la question suivante. Etant donnée z_0 un point de $\mathbb{P}^1$, et h un germe de section locale de $\mathscr{D}$ en z_0, existe-t-il pour presque toute trajectoire brownienne ω partant de z_0 un temps d'arrêt fini $T(\omega)$ tel que h se prolonge le long de $\omega([0, T(\omega)[)$ mais pas le long de $\omega([0, T(\omega)])$. A la vue de la proposition et de sa démonstration, je m'attendais à ce que la réponse soit positive. Mais il n'en est rien. J'obtiens au contraire le théorème suivant :

Théorème 1.3. *Donnons nous une structure projective complexe branchée sur une surface de Riemann Σ hyperbolique et analytiquement finie (c'est à dire biholomorphe à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points). Soit $\mathscr{D} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^1$ une application développante et $\rho : \Pi_1(\Sigma) \to PSl(2, \mathbb{C})$ une application de monodromie associée à cette structure projective. Notons $\Gamma = \rho(\Pi_1(\Sigma))$. Soient $(x_0, z_0) \in \tilde{\Sigma} \times \mathbb{P}^1$ vérifiant $\mathscr{D}(x_0) = z_0$ et notons h le germe d'holonomie de la section locale de $\mathscr{D}$ vérifiant $h(z_0) = x_0$. Sous les hypothèses suivantes :*

1. *$\mathscr{D}$ est surjective.*
2. *Γ est un groupe non compact n'ayant aucun sous-groupe d'indice fini qui soit réductible.*

Alors, on a :

1. *Pour presque tout $\omega \in \Omega_{x_0}$, $\mathscr{D}(\omega(t))$ n'a pas de limite quand $t \to \infty$.*
2. *Pour presque tout $\omega \in \Omega_{z_0}$, h se prolonge le long de $\omega([0, \infty[)$.*

Remarques 1.4. 1. *Grâce au théorème d'invariance conforme du mouvement brownien, les deux conclusions du théorème précédent sont équivalentes.*

2. *Un sous groupe Γ de $PSl(2, \mathbb{C})$ est dit réductible si il laisse fixe un point de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$.*
3. *Ω_{x_0} (resp Ω_{z_0}) correspond à l'ensemble des trajectoires browniennes dans $\mathbb{D} = \tilde{\Sigma}$ (resp $\mathbb{P}^1$) munie de la métrique de Poincaré (resp métrique sphérique) et partant de x_0 (resp z_0).*

Le théorème précédent affirme que, dans le cas où $\mathscr{D}$ est surjective, pour presque toute trajectoire brownienne ω partant de x_0 dans $\mathbb{D}$, $\mathscr{D}(\omega(t))$ n'a pas de limite quand t tend vers l'infini. Néanmoins, pour presque toute trajectoire brownienne ω partant de x_0 dans $\mathbb{D}$, il existe un point de $\mathbb{P}^1$ près duquel $\mathscr{D}(\omega(t))$ passe presque tout son temps t. Plus précisément, je démontre :

Théorème 1.5. *Fixons une structure projective complexe non branchée sur une surface de Riemann Σ hyperbolique et compacte. Soit $\mathscr{D} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^1$ une application développante et $\rho : \Pi_1(\Sigma) \to PSl(2, \mathbb{C})$ une application de monodromie associée à cette structure projective. Notons $\Gamma = \rho(\Pi_1(\Sigma))$. Supposons que Γ soit non compacte et n'ait aucun sous-groupe d'indice fini qui soit réductible. Soit x_0 appartenant à $\tilde{\Sigma}$. Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega_{x_0}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $z(\omega) \in \mathbb{P}^1$ tel que l'on ait :*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \cdot leb \{u \in [0, t] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(u)) \in D(z(\omega), \epsilon)\} = 1$$

Remarque 1.6. *Dans le théorème (1.3), nous avions supposé que Σ était analytiquement finie et que la structure projective sur Σ était éventuellement branchée. Ici, la surface Σ est compacte et la structure projective sur celle-ci est non branchée. Ces hypothèses plus fortes rendent la preuve moins techniques mais ne sont, à mon avis, pas nécessaire.*

Pour prouver les deux théorèmes précédemment cités (1.3) et (1.5), on utilisera le procédé de discrétisation de Furstenberg-Lyons-Sullivan qui permet d'associer à un mouvement brownien dans $\mathbb{D}$ une marche aléatoire droite dans $\Pi_1(\Sigma)$. Cette marche aléatoire est ensuite poussée par ρ et définit une marche aléatoire droite dans le groupe de monodromie Γ qui est un sous-groupe de type fini de $PSl(2, \mathbb{C})$. Les marches aléatoires dans de tels groupes sont étudiées en détail dans la section (7). On y redéfinit les outils de base de la théorie, on y redémontre certains résultats classiques avant de démontrer une propriété de proximalité (7.1) qui est l'ingrédient clef de la preuve des théorèmes (1.3) et (1.5) et qui dit en substance la chose suivante :

tirons aléatoirement dans un sous-groupe de type fini de $PSl(2, \mathbb{C})$ une suite d'éléments $(\gamma_i)_{i\geq 0}$ indépendamment les uns des autres avec une mesure μ et considérons le produit $X_n = \gamma_1 \cdots \gamma_n$. Alors, si le groupe engendré par le support de μ est assez gros et sous une hypothèse de premier moment pour μ, on a que presque sûrement, il existe deux suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{P}^1$ tel que :

1. X_n envoie le complémentaire d'un disque exponentiellement petit centré en y_n dans un disque exponentiellemnt petit centré en z_n.
2. X_n envoie un disque exponentiellement petit centré en y_n vers le complémentaire d'un disque centré en z_n et de rayon constant.

Dans le dernier paragraphe, on appliquera le théorème (1.3) à l'étude du prolongement analytique de germes d'holonomie de feuilletages. Soit S une surface complexe munie d'un feuilletage holomorphe singulier de dimension (complexe) un. Soient C_1 et C_2 deux sous variétés analytiques de S transverses au feuilletage partout sauf en un nombre fini de points. La donnée d'une feuille L du feuilletage intersectant transversalement C_1 en p_1 et C_2 en p_2 et d'un chemin continu contenu dans L définit un germe d'application holomorphe $h : (C_1, p_1) \to (C_2, p_2)$ appelé germe d'holonomie du feuilletage. On peut s'intéresser au prolongement analytique de h le long de trajectoires continues partant de p_1 et contenues dans C_1. C'est ainsi que Frank Loray conjecture dans [L] que si $\mathscr{F}$ est le feuilletage dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ défini par une équation du type $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, si L_1 et L_2 sont 2 droites verticales non invariantes par le feuilletage et $h : (L_1, p_1) \to (L_2, p_2)$ est un germe d'holonomie du feuilletage, alors l'ensemble des singularités de h pour le prolongement analytique est au plus dénombrable.

Dans [CDFG], les auteurs trouvent des contre-exemples à cette conjecture : ils construisent des feuilletages holomorphes du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$ ayant un germe d'holonomie entre 2 lignes algébriques dont le prolongement analytique a un ensemble plein de singularités (voir le théorème (11.4)). Leur preuve repose sur la construction du feuilletage obtenu par suspension de l'application de monodromie associée à une structure projective sur la sphère de Riemann privée d'un nombre fini de points : $\Sigma = \mathbb{P}^1 - \{p_1, ..., p_n\}$. Le feuilletage obtenu est un feuilletage holomorphe non singulier sur une surface complexe S fibrée en $\mathbb{P}^1$ au dessus de Σ. Par construction, tout germe d'holonomie du feuilletage d'une fibre du fibré vers la diagonale du fibré est un germe de section de $\mathscr{D}$. Si on choisit un groupe de monodromie dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$, on aura alors que de tels germes ont un ensemble plein de singularités. Néanmoins, ce qu'affirme le théorème (1.3), c'est que de tels germes se prolongent le long de presque toute trajectoire brownienne.

Le feuilletage construit plus haut est un feuilletage holomorphe non singulier d'une surface non compacte. Dans [CDFG], les auteurs montrent comment compactifier la surface S et le feuilletage pour obtenir un feuilletage holomorphe singulier de $\mathbb{P}^2$ conservant les mêmes propriétés. Remarquons également que le feuilletage ainsi construit est de type Riccati. Sur de tels feuilletages, je montre le résultat suivant :

Théorème 1.7. *Donnons nous un feuilletage de Riccati de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Soient σ_1 et σ_2 deux sections de la fibration verticale. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $C_i = \sigma_i(\mathbb{P}^1)$. Soit $h : (C_1, p_1) \to (C_2, p_2)$ un germe d'holonomie du feuilletage. Supposons que le groupe de monodomie Γ du feuilletage agisse de manière minimale sur $\mathbb{P}^1$. Alors h se prolonge le long de presque toute trajectoire brownienne dans C_1 partant de p_1 (on choisit le brownien sur C_1 associé à la métrique (notée sph_1) image par σ_1 de la métrique sphérique sur $\mathbb{P}^1$).*

Première partie

Composantes de Fatou et de Julia d'un feuilletage transversalement holomorphe

2 Définitions

Dans cette première section, nous allons définir les composantes de Fatou et de Julia d'un feuilletage transversalement holomorphe en suivant la présentation de [GGS].

Soit M une variété compacte connexe de dimension réelle $d+2$ munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ transversalement holomorphe. Un tel feuilletage peut être défini par un atlas maximal $(U_i, \varphi_i, \gamma_{ij})$. Les U_i sont des ouverts recouvrant M. Les applications $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ sont des submersions à fibres connexes et les applications de changement de carte $\gamma_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ sont des biholomorphismes et vérifient $\varphi_i = \gamma_{ij} \circ \varphi_j$.

On regarde $(M, \mathscr{F})$ comme un feuilletage de codimension 1 complexe. Notons TM le fibré tangeant à M, $T\mathscr{F}$ le sous fibré de TM constitué des vecteurs qui sont tangeants aux feuilles et $\nu^{1,0}$ le fibré quotient $TM/T\mathscr{F}$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T\mathscr{F} \longrightarrow TM \longrightarrow \nu^{1,0} \longrightarrow 0$$

Soit E un fibré vectoriel au dessus de M. On dit qu'un germe de section X de E en un point x de M a un module de continuité $\epsilon \log \epsilon$ si il existe une constante C, un voisinage U de x et une trivialisation du fibré au dessus de U pour laquelle pour tous x_1, x_2 appartenant à U, on ait :

$$| X(x_2) - X(x_1) | < -C \mid x_1 - x_2 \mid \log \mid x_1 - x_2 \mid$$

On note $\mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(E)$ le faisceau des sections du fibré E qui ont un module de continuité $\epsilon \log \epsilon$. On a alors la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(T\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(TM) \longrightarrow \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(\nu^{1,0}) \longrightarrow 0$$

Le fibré vectoriel $\nu^{1,0}$ est constant le long des feuilles. En effet, ce fibré vectoriel peut être défini par le cocycle : $U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$, $p \mapsto \gamma'_{ji}(\varphi_i(p))$. Ces applications sont constantes sur les fibres de φ_i c'est à dire le long des feuilles. Dès qu'on a un fibré constant le long des feuilles, on peut définir des sections du fibré qui sont constantes le long des feuilles. On parle alors de sections basiques du fibré.

De même que $\nu^{1,0}$, le fibré $\nu^{1,0} \otimes \nu^{0,1*}$ est un fibré constant le long des feuilles. Notons $L^{\infty}_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0} \otimes \nu^{0,1*})$ le faisceau des sections basiques de ce fibré qui sont essentiellement bornées. Notons également $\mathscr{C}_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0})$ le faisceau des sections basiques continues de $\nu^{1,0}$ vérifiant : $\forall \sigma \in \mathscr{C}_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0})$, $\overline{\partial}\sigma \in L^{\infty}_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0} \otimes \nu^{0,1*})$. Notons $\mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}_{\mathscr{F}}(TM) := \pi^{-1}(\mathscr{C}_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0}))$ (où π est la projection $\pi : \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(TM) \longrightarrow \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(\nu^{1,0})$). On a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}(T\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{C}^{\epsilon \log \epsilon}_{\mathscr{F}}(TM) \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0}) \longrightarrow 0$$

Le premier faisceau est fin donc $H^1(M, C^{\epsilon \log \epsilon}(T\mathscr{F})) = 0$, et on a la suite suivante :

$$0 \to H^0(M, C^{\epsilon \log \epsilon}(T\mathscr{F})) \to H^0(M, C^{\epsilon \log \epsilon}_{\mathscr{F}}(TM)) \to H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0})) \to 0$$

Ainsi tout champ de vecteurs basique normal $X \in H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0}))$ se relève en un champ de vecteurs basique qui a un module de continuité $\epsilon \log \epsilon$. De tels champs de vecteurs ont la propriété d'être intégrable.

On a donc montré :

Lemme 2.1. *[GGS]*

1. *Tout champ de vecteurs $X \in H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0}))$ se relève en un champ de vecteurs appartenant à $H^0(M, C^{\epsilon \log \epsilon}_{\mathscr{F}}(TM))$.*
2. *Tout champ de vecteurs $X \in H^0(M, C^{\epsilon \log \epsilon}_{\mathscr{F}}(TM))$ définit un flot à un paramètre réel $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ qui préserve le feuilletage.*

Definition 2.2.
- *L'ensemble de Julia de $(M, \mathscr{F})$ est l'ensemble fermé saturé pour le feuilletage défini par :*

$$\mathit{Julia}(\mathscr{F}) = \left\{ x \in M \text{ tel que } X(x) = 0 \quad \forall X \in H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0})) \right\}$$

- *L'ensemble de Fatou de $(M, \mathscr{F})$ est l'ensemble ouvert saturé pour le feuilletage défini comme le complémentaire de l'ensemble de Julia*

Proposition 2.3. *Les feuilles de l'ensemble de Fatou sont sans holonomie.*

Démonstration. Soit L une feuille de l'ensemble de Fatou et $X \in H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0}))$ non nul sur L. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ des relevés de X et iX dans $H^0(M, C_{\mathscr{F}}^{\epsilon \log \epsilon}(TM))$ et soit

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & \mathbb{C} \times M & \rightarrow & M \\ & & (te^{i\theta}, x) & \mapsto & \phi(te^{i\theta}, x) \end{array}$$

où $\phi(te^{i\theta}, x)$ désigne le flot à l'instant t et partant de x de $\tilde{X} \cos\theta + \tilde{Y} \sin\theta$. Soit $\gamma : [0,1] \rightarrow L$ un chemin continu. Par compacité de $\gamma([0,1])$, il existe V_0 un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \gamma([0,1])$, V_0 est plongé par $\phi(., x)$ dans M en un disque T_x transverse au feuilletage. Ainsi, l'application d'holonomie :

$$hol_{\gamma, T_{\gamma(0)}, T_{\gamma(1)}} : T_{\gamma(0)} \longrightarrow T_{\gamma(1)}$$

envoie $\phi(z, \gamma(0))$ sur $\phi(z, \gamma(1))$ pour tout z appartenant à V_0. En particulier, si γ est un lacet : $\gamma(0) = \gamma(1)$ et

$$hol_{\gamma, T_{\gamma(0)}, T_{\gamma(1)}} : T_{\gamma(0)} \longrightarrow T_{\gamma(1)}$$

est l'identité. ∎

Remarque 2.4. *La définition de composantes de Fatou et Julia qui vient d'être donnée est à priori valable pour des feuilletages non singuliers. Mais, comme le précise [GGS], on peut l'étendre à des feuilletages holomorphes (singuliers) génériques de* $\mathbb{P}^2$ *: considérons en effet un feuilletage holomorphe de* $\mathbb{P}^2$ *dont les singularités* p_i *soient hyperboliques. On sait alors que si on choisit des boules* B_i *centrées en les* p_i *suffisamment petites, le feuilletage est transverse à* ∂B_i*. La variété* $N = M - \cup B_i$ *est une variété à bord munie d'un feuilletage transverse au bord que l'on peut donc dédoubler en une variété compacte sans bord* $\tilde{M}$ *munie d'un feuilletage* $\tilde{\mathscr{F}}$ *transversalement holomorphe non singulier. On utilise alors la définition précédente pour partionner* $\tilde{M}$ *en 2 sous ensembles* $Fatou(\tilde{\mathscr{F}})$ *et* $Julia(\tilde{\mathscr{F}})$*. On revient ensuite à* $(M, \mathscr{F})$ *en définissant* $Fatou(\mathscr{F})$ *comme le saturé de* $Fatou(\tilde{\mathscr{F}}) \cap N$ *et* $Julia(\mathscr{F})$ *comme le saturé de* $Julia(\tilde{\mathscr{F}}) \cap N$ *union les singularités* p_i *(remarquons que les séparatrices sont dans le Julia puisqu'elles ont de l'holonomie).*

Utilisant l'existence de champs de vecteurs basiques normaux non nuls en tout point de l'ensemble de Fatou, les auteurs montrent la propriété d'homogénéïté suivante :

Proposition 2.5. *[GGS] soit* F_k *une composante connexe de l'ensemble de Fatou et* $\mathscr{F}_k$ *la restriction de* $\mathscr{F}$ *à* F_k*. Etant donnés* x_1 *et* x_2 *deux points* *de F_k, il existe un homéomorphisme de M envoyant x_1 sur x_2 et préservant (globalement) le feuilletage*

Démonstration. D'une part, étant donné un point x de F_k, il est facile de trouver des homéomorphismes préservant le feuilletage et envoyant x sur tout point situé dans la même feuille que x (il suffit d'intégrer des champs de vecteur tangents au feuilletage).

D'autre part, pour ce qui est de la direction transverse, on utilise le fait que si x est dans l'ensemble de Fatou, alors il existe $X \in H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0}))$ avec $X(x) \neq 0$. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ des relevés de X et iX dans $H^0(M, C_{\mathscr{F}}^{\epsilon \log \epsilon}(TM))$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{C} \times M & \rightarrow & M \\ & & (te^{i\theta}, x) & \mapsto & \phi(te^{i\theta}, x) \end{array}$$

où $\phi(te^{i\theta}, x)$ désigne le flot à l'instant t et partant de x de $\tilde{X_\theta} := \tilde{X} \cos\theta + \tilde{Y} \sin\theta$. Le champ de vecteurs $\tilde{X_\theta}$ est basique, donc à $te^{i\theta}$ fixé, l'application $\phi(., te^{i\theta})$ préserve le feuilletage. On obtient ainsi des homéomorphismes préservant le feuilletage et envoyant x sur tout point y situé dans un disque (topologique) transverse au feuilletage et centré en x. On démontre la proposition en composant des applications des deux types. ■

La proposition précédente est l'ingrédient clef pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.6. *[GGS] Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété compacte munie d'un feuilletage transversalement holomorphe. Soit $\mathscr{F}_k$ la restriction de $\mathscr{F}$ à une composante connexe F_k de $Fatou(\mathscr{F})$. Alors, 3 cas exclusifs peuvent se produire :*

1. *cas d'une composante errante : les feuilles de $\mathscr{F}_k$ sont fermées dans F_k*
2. *cas d'une composante semi-errante : les fermetures des feuilles de $\mathscr{F}_k$ forment un feuilletage de codimension 1 réel qui fibre au dessus d'une variété de dimension 1.*
3. *cas d'une composante dense : toutes les feuilles de $\mathscr{F}_k$ sont denses dans F_k*

Dans leur article, Ghys, Gomez-Mont et Saludes s'intéressent séparément à ces 3 cas. Pour ce qui est du cas errant, ils démontrent le résultat suivant :

Théorème 2.7. *[GGS] soit F_k une composante errante de l'ensemble de Fatou. Alors, l'espace des feuilles $\Sigma_k := F_k/\mathscr{F}_k$ est une surface de Riemann analytiquement finie, c'est à dire que Σ_k s'obtient en privant une surface de Riemann compacte d'un nombre fini de points.*

Remarque 2.8. *On peut noter l'analogie avec le résultat d'Ahlfors disant que si Γ est un groupe kleinien de type fini, alors le quotient de l'ensemble de discontinuité $\Omega(\Gamma)$ par l'action de Γ est une surface de Riemann analytiquement finie*

Terminons cette section en donnant quelques exemples de feuilletages transversalement holomorphes et de leurs composantes de Fatou et de Julia. On pourra en trouver bien d'autres dans [GGS].

1. Les flots linéaires du tore $\mathbb{T}^3$: le feuilletage de $\mathbb{R}^3$ par droites parallèles est invariant par l'action de $\mathbb{Z}^3$ et passe donc au quotient en un feuilletage de $\mathbb{T}^3$ transversalement holomorphe. Selon le choix de la pente des droites parallèles de départ, on obtient un feuilletage constitué soit d'une composante du Fatou errante, soit d'une composante du Fatou semi-errante, soit d'une composante dense. Ces exemples sont moyennement intéressants dans la mesure où l'ensemble de Julia est vide mais illustrent les 3 types de composantes du Fatou que l'on peut rencontrer.
2. Soit B une variété compacte et $h : \Pi_1(B) \to PSl(2,\mathbb{C})$. Notons $\Gamma = h(\Pi_1(B))$. Le groupe $\Pi_1(B)$ agit sur $\tilde{B} \times \mathbb{P}_1$:

$$\begin{aligned}(\tilde{B} \times \mathbb{P}^1) \times \Pi_1(B) &\longrightarrow \tilde{B} \times \mathbb{P}^1\\ ((x,z),\alpha) &\longmapsto (x.\alpha, \rho(\alpha)^{-1}.z)\end{aligned}$$

   Le quotient $M = (\tilde{B} \times \mathbb{P}_1)/\Pi_1(\Sigma)$ est une variété fibrée en $\mathbb{P}^1$ au dessus de B. Notons $\mathscr{F}$ le feuilletage suspension sur M défini comme le quotient par l'action de $\Pi_1(B)$ du feuilletage horizontal $\tilde{\mathscr{F}}$ de $\tilde{B} \times \mathbb{P}_1$. Dans le cas d'une suspension, pour comprendre la dynamique du feuilletage, il suffit de comprendre la dynamique de l'action de Γ sur une fibre de la projection $p : M \to B$. Si F_0 est une telle fibre, l'intersection de l'ensemble de Fatou avec F_0 correspond exactement aux points z de la fibre pour lesquels il existe un champ de vecteurs Γ-invariant non nul en z. Si par exemple, Γ est un groupe kleinien, on se convaint, à l'aide de la remarque qui vient d'etre faite que les points de l'ensemble limite pour l'action de Γ sur F_0 sont dans le Julia de $\mathscr{F}$. Mais ce ne sont pas tout à fait les seuls : il faut rajouter d'éventuels points fixes elliptiques de l'ensemble de discontinuité. Comme dit dans l'article [GGS], il s'agit là d'une limite de la théorie puisqu'on aurait envie que les feuilles correspondant à ces points fixes elliptiques (elles ont une holonomie finie et donc une dynamique qui n'est pas très chaotique) soient dans le Fatou. Remarquons que dans la définition de Asuke ces feuilles sont dans le Fatou.

3 Morphismes harmoniques et mouvement brownien

3.1 Morphismes harmoniques

Cette sous-section énonce sans preuve les théorèmes dont nous aurons besoin par la suite concernant la théorie des morphismes harmoniques. Pour plus d'informations sur le sujet et les preuves des résultats annoncés, le lecteur pourra se référer par exemple à ([W]) dans lequel l'auteur fait un bref survol de la théorie ou encore au livre plus complet ([U]).

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes C^∞ de dimensions respectives m et n. Pour simplifier, nous supposons également que M est compact sans bord. On note $\Delta_M = div(grad)$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant $\Delta_M f = 0$ est appelée fonction harmonique. On a la définition suivante :

Definition 3.1. *Une application $\Phi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞ est un morphisme harmonique si pour toute fonction harmonique $f : V \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert V de N avec $\Phi^{-1}(V)$ non vide, la composée $f \circ \Phi$ est une fonction harmonique sur $\Phi^{-1}(V)$.*

Nous verrons plus loin que de tels applications sont caractérisées par le fait qu'elles préservent le mouvement brownien, propriété que nous utiliserons pour la preuve du théorème (1.1).

Nous allons maintenant donner quelques caractérisations utiles des morphismes harmoniques. En premier lieu, nous définissons la notion d'application harmonique entre deux variétés riemanniennes.

Definition 3.2. *Soit $\Phi : (M, g) \to (N, h)$ une application C^∞. L'énergie de Dirichlet de Φ est par définition la quantité :*

$$E(\Phi) = \frac{1}{2} \int_M \mid d\Phi \mid^2 dvol$$

- vol est la mesure volume sur M associée à la métrique g
- $\mid d\phi_x \mid$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle de Φ en x, c'est à dire que si (e_i) est une base orthonormée de $T_x M$:

$$\mid d\Phi_x \mid^2 = \sum_{i=1}^{m} h_{\Phi(x)}(d\Phi_x(e_i), d\Phi_x(e_i))$$

Rappelons qu'une variation C^∞ à un paramètre (Φ_t) de Φ est une application C^∞ $M\times]-\epsilon,\epsilon[\to M$, $(x,t)\mapsto \Phi_t(x)$ avec $\epsilon>0$ et $\Phi_0=\Phi$.

Definition 3.3. *Une application $\Phi:(M,g)\to(N,h)$ de classe C^∞ est une application harmonique si c'est un point critique pour l'énergie de Dirichlet c'est à dire si pour tout variation C^∞ à un paramètre (Φ_t) de Φ :*

$$\frac{d}{dt}E(\Phi_t)_{|t=0}=0$$

Definition 3.4. *Une application $\Phi:(M,g)\to(N,h)$ de classe C^∞ est dite horizontalement faiblement conforme si pour tout point p de M tel que $d\Phi_p\neq 0$, la différentielle $d\Phi_p$ envoie l'espace horizontal $\ker(d\Phi_p)^\perp$ de manière conforme sur $T_{\Phi(p)}N$, c'est à dire que $d\Phi_p$ est surjective et qu'il existe un nombre $\lambda(p)\neq 0$ tel que pour tous $X,Y\in\ker(d\Phi_p)^\perp$, on ait :*

$$h_{\phi(p)}(d\Phi_p(X),d\Phi_p(Y))=\lambda(p)^2 g_p(X,Y)$$

Nous avons la caractérisation suivante des morphismes harmoniques :

Théorème 3.5. *[Fug] Une application $\Phi:(M,g)\to(N,h)$ de classe C^∞ est un morphisme harmonique si et seulement si Φ est une application harmonique et Φ est horizontalement faiblement conforme.*

Voici une autre caractérisation :

Théorème 3.6. *[BE] Dans le cas où $n=2$, une application $\Phi:(M,g)\to(N,h)$ de classe C^∞ horizontalement faiblement conforme est une application harmonique (et donc est un morphisme harmonique d'après le théorème précédent) si et seulement si les fibres au dessus de toute valeur régulière de Φ sont des sous-variétés de M minimales pour la métrique g.*

Enfin, nous avons :

Théorème 3.7. *[Fug] Une application C^∞ $\Phi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ est un morphisme harmonique si et seulement si il existe une fonction $\lambda:M\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f:N\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ on ait :*

$$\Delta_M(f\circ\Phi)=\lambda^2\cdot(\Delta_N f)\circ\Phi$$

Cette dernière caractérisation ne nous sera pas vraiment utile dans la suite, mais je la cite quand même car c'est cette caractérisation qui permet à Darling [D] de montrer qu'un morphisme harmonique préserve le mouvement brownien.

3.2 Les morphismes harmoniques préservent le brownien

Nous commençons par une construction succinte du mouvement brownien sur une variété riemannienne. Des constructions complètes du mouvement brownien peuvent être trouvées par exemple dans [CC2] ou encore dans [H].

Soit (M, g) une variété riemannienne, connexe, complète et à géométrie bornée. Le mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ sur (M, g) est le processus de diffusion engendré par l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ sur (M, g). De manière plus précise, soit p une solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur M, c'est à dire une fonction $p : M \times M \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 par rapport à la première variable x et C^1 par rapport à la troisième t et vérifiant :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, y, t) = \Delta_x p(x, y, t)$$
$$\lim_{t \to 0} \int_M p(x, y, t) f(y) dy = f(x)$$

pour toute fonction continue bornée f sur M, la convergence étant celle de la convergence uniforme sur tout compact et dy étant la mesure volume sur M associée à la métrique. Notons $\Omega(M) := \{\omega : [0, +\infty[\to M \text{ tel que } \omega \text{ continu}\}$ et $\Omega_x(M) := \{\omega \in \Omega(M) \text{ tel que } \omega(0) = x\}$. L'ensemble $\Omega(M)$ est muni de la tribu cylindrique $\mathscr{B}$, c'est à dire la tribu engendrée par les ensembles (appelés cylindres) du type :

$$C = \{\omega \in \Omega(M) \text{ tel que } \omega(t_1) \in A_1, ..., \omega(t_1) \in A_1\}$$

où $t_1 < t_2 ... < t_n$ est une suite finie de temps et les A_i sont des boréliens de M. Si C est un tel cylindre et x est un point de M, on définit la mesure $\tilde{\mathbb{P}}_x$ de C par :

$$\tilde{\mathbb{P}}_x(C) = \int_{A_1} \int_{A_2} ... \int_{A_n} p(x, y_1, t_1) p(y_1, y_2, t_2 - t_1) \\ ... p(y_{n-1}, y_n, t_n - t_{n-1}) dy_n ... dy_2 dy_1$$

La définition de $\tilde{\mathbb{P}}_x$ sur les cylindres s'étend de manière unique en une mesure de probabilité (encore notée $\tilde{\mathbb{P}}_x$) sur la tribu $\mathscr{B}$ toute entière. Les $\tilde{\mathbb{P}}_x$ sont appelées mesures de Wiener. Si μ est une mesure de probabilité sur M, on peut définir une mesure $\tilde{\mathbb{P}}_\mu$ sur $\Omega(M)$ par :

$$\tilde{\mathbb{P}}_\mu = \int_{x \in M} \tilde{\mathbb{P}}_x d\mu(x)$$

Si μ est une mesure de probabilité sur M, un mouvement brownien de loi initiale μ est une application mesurable B définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$:

$$B : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\Omega(M), \mathscr{B})$$

et vérifiant :

1. pour A borélien de M, $\mathbb{P}(B_0(\omega) \in A) = \mu(A)$
2. pour $C \in \mathscr{B}$, $\mathbb{P}(B(\omega) \in C) = \tilde{\mathbb{P}}_\mu(C)$

Enfin, on parle de mouvement brownien partant d'un point x de M lorsque la loi initiale μ est un Dirac en x.

En 1940, Paul Lévy démontre le théorème d'invariance des trajectoires du mouvement brownien par transformations conformes (voir [Le]). Plus précisément :

Théorème 3.8. *[Lévy] Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan issu d'un point b_0 du plan et f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Alors, le processus $(f(B_t))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien changé de temps. Autrement dit, il existe une application $(\omega, t) \to \sigma(\omega, t)$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ telle que, le processus $(f(B_{\sigma^{-1}(s)}))_{s\geq 0}$ soit un mouvement brownien plan issu de $f(b_0)$. L'application σ vérifie les propriétés suivantes :*

- *à t fixé, l'application $\omega \to \sigma_t(\omega)$ est mesurable*
- *à ω fixé, l'application $t \to \sigma_\omega(t)$ est strictement croissante*

Remarque 3.9. *on peut donner une expression du changement de temps :* $\sigma(\omega, t) = \int_0^t \mid f'(B_u(\omega)) \mid^2 du$

Cette propriété a bien sûr servi à étudier le mouvement brownien plan à l'aide des fonctions analytiques. Mais inversement, elle peut aussi servir à étudier les propriétés des fonctions analytiques par des méthodes probabilistes. Citons, par exemple, la simple et jolie preuve du petit théorème de Picard (voir ([Da]) ou ([Du]) à l'aide de cette propriété d'invariance conforme du brownien.

Le théorème qui suit est une généralisation du théorème d'invariance conforme de Lévy. Il dit que les applications entre variétés riemanniennes qui préservent le brownien sont les morphismes harmoniques. Cette propriété a d'abord été démontrée dans le cas de morphismes harmoniques entre espaces euclidiens dans [BCD] puis dans le cas général de morphismes harmoniques entre variétés riemanniennes dans [D].

Théorème 3.10. *[D] Soit $\Phi : M \longrightarrow N$ de classe C^∞. L'application Φ est un morphisme harmonique si et seulement si on a la propriété suivante : soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un brownien sur M issu d'un point a et arrêté en un temps d'arrêt T. Il existe un processus croissant $\sigma : \Omega \times [0, T[\longrightarrow [0, +\infty[$ et un brownien $(B'_s)_{s\geq 0}$ partant de $\phi(a)$ tel que*

$$\Phi \circ B = B' \circ \sigma$$

Remarques 3.11.

1. *$\Phi \circ B = B' \circ \sigma$ signifie : pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $t \in [0, T(\omega)[$, on a : $\Phi \circ B_t(\omega) = B'_{\sigma_t(\omega)}(\omega)$.*
2. *Le théorème d'invariance conforme du brownien de Paul Lévy est une conséquence immédiate de ce théorème. En effet, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est un morphisme harmonique*
3. *Le changement de paramétrage de temps est donné par :*

$$\sigma_\omega(t) = \int_0^t \lambda^2(B_u(\omega))du$$

   où λ est le facteur d'horizontal conformité de Φ (défini dans la définition (3.4))
4. *il faut prendre bien garde au fait que, dans ce dernier théorème, on n'a pas nécessairement $\lim_{t\to T} \sigma_t = \infty$ presque sûrement : les trajectores $\Phi \circ B_t$ sont donc éventuellement seulement des portions de trajectoires browniennes. Il est facile de s'en convaincre lorsque $T < \infty$. Mais même lorsque $T = \infty$, on n'a pas nécessairement $\lim_{t\to T} \sigma_t = \infty$ presque sûrement comme le montre l'exemple suivant : considérons l'inclusion du disque de Poincaré munie de la métrique de Poincaré dans la sphére de Riemann $\mathbb{P}^1$ munie de la métrique sphérique. Cette application est évidemment un morphisme harmonique et il est clair que $\lim_{t\to\infty} \sigma_\omega(t)$ est fini presque sûrement*

5. *la preuve de ce théorème n'est pas particulièrement difficile. On peut la trouver dans [D]. Elle repose sur la caractérisation de Fuglede des morphismes harmoniques (3.7)*

4 Preuve du théorème (1.1)

Soit M une variété compacte de dimension $d+2$ munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ transversalement holomorphe. Supposons, de plus, que le feuilletage est minimalisable. Soit F une composante errante de l'ensemble de Fatou et $\Sigma = F/\mathscr{F}$, l'espace des feuilles, qui est une surface de Riemann analytiquement finie. Le but de cette partie est de montrer que, pour presque tout $a \in \partial F$, et pour tout $x \in F$ la feuille passant par x s'accumule sur a. Le terme presque tout est à prendre au sens de la mesure de sortie d'un brownien partant d'un point x_0 de F.

Commençons par donner une idée de la preuve : on commence par montrer que, sous l'hypothèse de minimalisabilité du feuilletage, on peut munir M d'une métrique g et Σ d'une métrique h de sorte que la projection $p : (F, g_{|F}) \longrightarrow (\Sigma, h)$ soit un morphisme harmonique. Soit maintenant B_t un brownien partant d'un point x_0 de F arrété au temps T de sortie de F et soit $a \in \partial F$ de sorte que a appartienne au support de la mesure de sortie de F du brownien. Si V_a est un voisinage de a, on a que, avec une probabilité strictement positive, $B_t \in V_a$ pour t assez proche de T. D'autre part, p est un morphisme harmonique. Donc p préserve le brownien et donc par le théorème (3.10), $p(B_{\sigma^{-1}(s)})$ est un brownien dans Σ arrété au temps $\lim\limits_{t\to T} \sigma_t$. On montre en fait que $\lim\limits_{t\to T} \sigma_t = \infty$ et donc que $p(B_{\sigma^{-1}(s)})$ est un vrai brownien défini pour tous temps. Puisque Σ est analytiquement finie, le mouvement brownien est réccurent dans Σ. Et donc, si U est un ouvert quelconque de F, il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $p(B_{\sigma^{-1}(s_n)})$ appartienne à $p(U)$. Cela implique qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers T telle que B_{t_n} apprtienne à $p^{-1}(p(U)) = sat(U)$ ($sat(U)$ désigne le saturé de U pour le feuilletage). Finalement, on a montré que pour tout U ouvert dans F et tout voisinage V_a de a, $sat(U) \cap V_a \neq \varnothing$. Nous verrons que cela implique le théorème.

Mettons tout ceci en place. Munissons Σ d'une métrique h à courbure constante égale à $+1$, 0 ou -1 selon le type de Σ et dans la classe conforme de Σ. On a le

Lemme 4.1. *il existe une métrique g sur M vérifiant :*

1. *les feuilles de $\mathscr{F}$ sont minimales*
2. *$p : (F, g_{|F}) \longrightarrow (\Sigma, h)$ est horizontalement conforme, c'est à dire qu'il existe $\lambda : F \to \mathbb{R}^*$ continue telle que si X et Y sont 2 champs de*

vecteurs orthogonaux aux fibres de p, on ait pour tout x appartenant F : $h_{p(x)}(p'_x(X(x)), p'_x(Y(x))) = \lambda^2(x).g_x(X(x), Y(x))$.

Démonstration. soit g_0 une métrique sur M rendant les feuilles minimales. Soit $\mathscr{A}$ un atlas constitué d'un nombre fini de cartes feuilletées $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ et λ_α une partition de l'unité subordonnée à cet atlas. Soient e_1 et e_2 deux champs de vecteur sur U_α vérifiant :

- $(\phi_\alpha)_*(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $i = 1, 2$
- $e_i \in T\mathscr{F}^\perp$, pour $i = 1, 2$

On complète (e_1, e_2) avec des sections de $T\mathscr{F}_{|U_\alpha}$ de sorte que, pour tout $x \in U_\alpha$, $b(x) = (e_1(x), e_2(x), e_3(x), ..., e_{d+2}(x))$ soit une base de T_xM. On a :

$$mat_{b(x)} g_0(x) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On définit la métrique g_0^α sur U_α par :

$$mat_{b(x)} g_0^\alpha(x) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puis on pose : $g = \sum_\alpha \lambda_\alpha g_0^\alpha$. Cette métrique g vérifie toutes les propriétés demandées : en effet, on a tout fait pour que la projection p soit horizontalement conforme et une modification de la métrique orthogonalement aux fibres ne modifie pas le caractère minimal de celles ci. ∎

La projection $p : (F, g_{|F}) \longrightarrow (\Sigma, h)$ est horizontalement conforme et ses fibres sont minimales. Donc, d'après le théorème (3.6), p est un morphisme harmonique. Par conséquent, par le théorème (3.10), p préserve le brownien à un reparamétrage de temps près. Donc, si B_t est un brownien partant d'un point x_0 de F arrêté au temps $T = \inf\{t \text{ tel que } B_t \in F^c\}$ de sortie de F, $p(B_{\sigma^{-1}(s)})$ est un brownien dans Σ partant de $p(x_0)$ et arrêté au temps $\lim_{t \to T} \sigma_t$. Il s'avère que $\lim_{t \to T} \sigma_t = \infty$. Il s'agit d'une simple conséquence de la proposition suivante :

Lemme 4.2. *Soit $\gamma : [0, +\infty[\to M$ un chemin continu tel que $\gamma(0) \in F$. Soit $t_0 := \inf\{t \in [0, +\infty[; \gamma(t) \notin F\}$. Alors $p \circ \gamma$ n'a pas de limite quand t tend vers t_0.*

Démonstration. Supposons qu'au contraire $\lim_{t \to t_0} p \circ \gamma(t) = z_0 \in \Sigma$. Soit U une carte feuilletée définie sur un voisinage de $\gamma(t_0)$: U est identifié avec $A \times B$ où A est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, B un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que les plaques du feuilletage sont les $A \times \{z\}$. Il existe $t_1 < t_0$ tel que pour tout $t \geq t_1$, on ait $\gamma(t) \in U$. Soit $x_0 \in p^{-1}(\{z_0\})$ et soit X un champ de vecteurs basique normal non nul en x_0. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ des relevés de X et iX (via $\pi : H^0(M, C_{\mathscr{F}}^{\epsilon \log \epsilon}(TM)) \to H^0(M, C_{\mathscr{F}}(\nu^{1,0})))$ et soit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{C} \times M & \to & M \\ & & (te^{i\theta}, x) & \mapsto & \phi(te^{i\theta}, x) \end{array}$$

où $\phi(te^{i\theta}, x)$ désigne le flot à l'instant t et partant de x de $\tilde{X} \cos\theta + \tilde{Y} \sin\theta$. En utilisant l'identification de U et $A \times B$ faite plus haut, on a, pour r assez petit :

$$\phi(\overline{D(0,r)} \times L_{x_0}) \cap U = \coprod_{i \in I} A \times V_i$$

où les V_i sont des disques (topologiques) fermés deux à deux disjoints. Remarquons également que les $\coprod_{i \in I} A \times V_i$ ne rencontrent pas l'ensemble de Julia et que éventuellement $I = \varnothing$. Soit $V = \phi(\overline{D(0,r)} \times L_{x_0})$ et $W = p(V)$: W est un voisinage de z_0. Donc, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in [t_2, t_0[$, on ait $p \circ \gamma(t) \in W$. Donc, pour tout $t \in [t_2, t_0[$, $\gamma(t) \in p^{-1}(W) \cap U = V \cap U = \coprod_{i \in I} A \times V_i$. Donc il existe $i \in I$ tel que pour tout $t \in [t_2, t_0[$, on ait $\gamma(t) \in A \times V_i$, ce qui contredit le fait que $\gamma(t_0)$ appartient à l'ensemble de Julia.

■

Corollaire 4.3. *Presque sûrement* $\lim_{t \to T} \sigma_t = \infty$

Démonstration. Presque sûrement,

$$\begin{array}{cccc} B & : & [0,T[& \to & M \\ & & t & \mapsto & B_t \end{array}$$

est continue. Donc, d'après le lemme précédent, presque sûrement $p \circ B_t$ n'a pas de limite quand t tend vers T. Or par le théorème d'invariance du brownien par les morphismes harmoniques, il existe un brownien B'_s sur Σ tel que pour tout $t \in [0, T[$, on ait : $p \circ B_t = B'_{\sigma_t}$. Donc, presque sûrement, B'_{σ_t} n'a pas de limite quand t tend vers T. Donc, nécessairement, $\lim_{t \to T} \sigma_t = \infty$
■

Notons μ la mesure de sortie de F : $\mu(A) = \mathbb{P}_{x_0}(B_T \in A)$, pour A borélien dans ∂F. Nous pouvons maintenant montrer le théorème, c'est à dire que pour μ presque tout $a \in \partial F$, pour tout $x \in F$, $a \in \overline{L_x}$.

Comme Σ est analytiquement fini, le processus $B'_s := (p(B_{\sigma^{-1}(s)}))_{0 \leq s \leq \sigma(T) = +\infty}$ est réccurent dans Σ. Soient $x \in F$, U_x un voisinage de x, $a \in supp(\mu)$ et V_a un voisinage de a dans M. Nous allons montrer que $sat(U_x) \cap V_a \neq \varnothing$. En effet, le fait que a appartienne au support de μ implique $\mu(V_a) \neq 0$. Si on note $A = \{\omega \text{ tel que } B_{T(\omega)}(\omega) \in V_a\}$, on a $\mathbb{P}_{x_0}(A) = \mu(V_a) > 0$. Et donc, pour tout $\omega \in A$, $B_t(\omega) \in V_a$ pout t assez proche de $T(\omega)$. D'autre part, le fait que B'_s soit récurrent sur Σ entraine que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe s_n tendant vers l'infini telle que $B_{s_n}(\omega) \in p(U_x)$. Donc, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe t_n tendant vers $T(\omega)$ telle que $B_{t_n}(\omega) \in p^{-1}(p(U_x)) = sat(U_x)$. On a donc, pour presque tout $\omega \in A$ (c'est à dire sur un ensemble de probabilité positive), il existe une suite t_n tendant vers $T(\omega)$ telle que $B_{t_n}(\omega) \in sat(U_x) \cap V_a$. En particulier, $sat(U_x) \cap V_a \neq \varnothing$.

Déduisons-en que $a \in \overline{L_x}$: pour tout voisinage U_x de x et tout voisinage V_a de a, on a :$sat(U_x) \cap V_a \neq \varnothing$. Donc, il existe $x_n \to x$ et $\exists\ y_n \to a$ avec $y_n \in L_{x_n}$. Soit X_n une suite de champs de vecteurs basiques non nuls en x_n et vérifiant $\Phi_n(1, x_n) = x$ où $\Phi_n : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ est le flot associé au champ de vecteurs X_n. On a : $X_n(y_n) \to 0$ (car $y_n \to a \in Julia$). Donc $\Phi_n(1, y_n) \to a$. Or $\Phi_n(1, .) : M \longrightarrow M$ préserve le feuilletage, ce qui implique que $\Phi_n(1, y_n) \in L_x$. On a donc bien montré que $a \in \overline{L_x}$.

Deuxième partie
Développés de browniens

5 Structures projectives

L'objet de cette partie est de faire une brève introduction aux structures projectives complexes. On pourra se référer au survol de David Dumas [Dum], ou encore à l'article de David Marin et Franck Loray [LM] pour plus d'informations.

Definition 5.1. *Soit Σ une surface de Riemann. Une structure projective complexe branchée sur Σ est la donnée d'un atlas maximal $(\phi_i : U_i \to V_i)$ où les U_i sont des ouverts recouvrant Σ, les ϕ_i sont des applications holomorphes non constantes de U_i à valeurs dans V_i (ouverts de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$) tel que les applications de changement de carte $\gamma_{ij} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ sont des restrictions de transformations de Möbius de $\mathbb{P}^1$ (c'est à dire d'éléments de $PSl(2,\mathbb{C})$)*

Remarque 5.2. *Le terme branché vient du fait que les applications ϕ_i peuvent avoir des points critiques. En fait, les ϕ_i définissent une structure d'orbifold sur Σ avec des changements de coordonnées projectives. Si les ϕ_i n'ont pas de points critiques, alors ils définissent un atlas de surface de Riemann avec changements de coordonnées projectives et dans ce cas, on parle simplement de structure projective complexe.*

Fixons nous une telle carte $\phi_i : U_i \to V_i$. Si U_j est une autre carte intersectant U_i, l'application $\gamma_{ij} \circ \phi_j : U_j \to \mathbb{P}^1$ coïncide avec ϕ_i sur $U_i \cup U_j$ et permet donc de prolonger ϕ_i à U_j. Continuer ainsi de proche en proche nous permet de définir une application holomorphe $\mathscr{D}$ définie non pas sur Σ mais sur son revêtement universel $\tilde{\Sigma}$. Cette application $\mathscr{D} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^1$ est appelée application développante de la structure projective. Elle est définie à une post-composition près par une transformation de Möbius (le choix de la carte de départ).

A ceci est associé de manière canonique un morphisme $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSl(2,\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall x \in \tilde{\Sigma},\, \forall \alpha \in \Pi_1(\Sigma),\, \mathscr{D}(\alpha.x) = \rho(\alpha).\mathscr{D}(x)$$

L'application ρ est appelée représentation de monodromie et son image $\rho(\Pi_1(\Sigma))$ groupe de monodromie de la structure projective. L'application développante $\mathscr{D}$ étant défini à une post-composition près par une transformation de Möbius, il vient que ce groupe de monodromie est défini à conjugaison près par cette transformation de Möbius.

Ainsi, à toute structure projective complexe branchée, on peut associer un couple application développante-représentation de monodromie $(\mathscr{D}, \rho)$. Il n'est pas difficile de se convaincre que réciproquement, la donnée d'un tel couple sur une surface de Riemann définit sur celle-ci une structure projective complexe.

Exemples 5.3. *1. Soit Σ une surface de Riemann hyperbolique. Σ a pour revêtement universel le demi plan de Poincaré $\mathbb{H}$ et $\Sigma = \mathbb{H}/\Gamma$ où Γ est un sous groupe de $PSl(2,\mathbb{R})$ agissant librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{H}$. Le couple $(\mathscr{D}, \rho) = (i : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{P}^1,\ i : \Gamma \hookrightarrow PSl(2,\mathbb{C}))$ (où i désigne l'inclusion dans les 2 cas) définit une structure projective sur Σ appelée structure projective uniformisante de Σ.*

2. Soit Γ un groupe kleinien (sous groupe discret de $PSl(2,\mathbb{C})$) tel que l'ensemble de discontinuité $\Omega(\Gamma)$ associée à l'action de Γ sur $\mathbb{P}^1$ soit non vide. Le quotient $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ est une surface de Riemann qui peut être munie d'une structure projective de la manière suivante : on recouvre le quotient $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ par des ouverts U_i suffisamment petits et on fait le choix de sections locales s_i (au dessus des U_i) de la projection $p : \Omega(\Gamma) \to \Omega(\Gamma)/\Gamma$. Les $s_i : U_i \to \Omega(\Gamma) \subset \mathbb{P}^1$ forment un atlas de Σ pour lequel les changemnts de cartes sont des éléments de Γ c'est à dire des transformations de Möbius.

Nous utiliserons des structures projectives sur des sphères épointées : $\Sigma = \mathbb{P}^1 - \{p_1, ...p_d\}$.

Definition 5.4. *une structure projective sur une telle surface est dite de type parabolique si il existe une coordonnée locale w autour de chaque p_i telle que dans cette coordonnée, une certaine application développante de la structure projective s'écrive :*

$$\mathscr{D} = \frac{1}{2i\pi} \log(w - w(p_i))$$

Proposition 5.5. *[CDFG] Si Σ est la sphère de Riemann privée d'au moins 4 points, alors il existe une structure projective de type parabolique sur Σ dont le groupe de monodromie soit dense dans $PSl(2,\mathbb{C})$*

6 Prolongement analytique de germe d'application développante

Soient (C_0, p_0) et (C_1, p_1) deux surfaces de Riemann pointées et un germe de fonction holomorphe $h : (C_0, p_0) \to (C_1, p_1)$. Soit $\tau : [0, t] \to C_0$ un chemin continu vérifiant $\tau(0) = p_0$. On dit que la suite de disques ouverts $D_0, D_1, ..., D_n$ recouvre τ si il existe $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ tel que $\tau([t_k, t_{k+1}]) \subset D_k$. On dit que h admet un prolongement analytique le long de $\tau([0, t])$ si il existe une suite de disques $D_0, D_1, ..., D_n$ recouvrant τ et des fonctions holomorphes $f_k : D_k \to C_1$ telles que le germe de f_0 en p_0 soit égal à h et que pour tous $k \in \{0, ..., n-1\}$, on ait $f_k = f_{k+1}$ sur $D_k \cap D_{k+1}$.

Definition 6.1. *On dit que $q \in C_0$ est une singularité pour h si il existe un chemin continu $\tau : [0, 1] \to C_0$ tel que*

1. $\tau(0) = p_0$ *et* $\tau(1) = q$.
2. $\forall \epsilon > 0$, *h admet un prolongement analytique le long de* $\tau([0, 1-\epsilon])$.
3. *h n'admet pas de prolongement analytique le long de* $\tau([0, 1])$.

Si τ est un tel chemin, il se peut très bien que pour un autre chemin $\tau' : [0, 1] \to C_0$ joignant p_0 à q, h se prolonge le long de $\tau'([0, 1])$. On a donc la définition plus forte suivante :

Definition 6.2. *Si D est un disque topologique contenant p_0 et si pour tout chemin $\tau : [0, 1] \to C_0$ vérifiant $\tau(0) = p_0$ et $\tau(1) \in \partial D$, on a :*

1. $\forall \epsilon > 0$, *h admet un prolongement analytique le long de* $\tau([0, 1-\epsilon])$.
2. *h n'admet pas de prolongement analytique le long de* $\tau([0, 1])$.

on dit que ∂D est un bord naturel pour le prolongement analytique de h.

Proposition 6.3. *[CDFG] Soit Σ une surface de Riemann hyperbolique munie d'une structure projective. Soit $\mathscr{D}$ une application développante associée à cette structure projective et h un germe d'une section locale de $\mathscr{D}$.*

1. *Si la structure projective est la structure projective uniformisante, alors h a un bord naturel pour le prolongement analytique.*
2. *Si le groupe de monodromie est dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$, alors l'ensemble des points singuliers pour le prolongement analytique de h est $\mathbb{P}^1$ tout entier.*

Démonstration. On pourra se référer à [CDFG] pour une preuve complète. Nous ne donnons ici que quelques idées de preuve qui nous semblent éclairant pour la suite.

1. on a vu que dans ce cas l'application développante est l'inclusion $i : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$. Donc $\partial\mathbb{H} \subset \mathbb{P}^1$ est un bord naturel pour le prolongement analytique de h.
2. Soit h un germe d'une section locale de $\mathscr{D}$ en un point z_0 appartenant à $\mathbb{P}^1$ et posons $p_0 = h(z_0)$. La preuve repose sur le lemme suivant :

   Lemme 6.4. *[CDFG] Pour tout $z \in \mathbb{P}^1$, il existe un ensemble fini $\mathscr{A}$ de $\Pi_1(\Sigma)$ et une suite infinie $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ ayant les propriétés suivantes (notons $A_n = \alpha_1\alpha_2....\alpha_n$ et $A_0 = id$) :*

   (a) le diamètre de la boule
   $$B_n = \left\{ w \in \mathbb{P}^1 \textit{ tel que } \mid d(\rho(A_n)) \mid (w) \geq \frac{1}{2^n} \right\}$$
   tend exponentiellement vite vers 0

   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho(A_n)(\mathbb{P}^1 - B_n) \subset D(z, \frac{cste}{2^n})$

   (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, ni z_0 ni $\rho(\alpha_n)(z_0)$ n'appartient à B_{n-1}

   Dans ce lemme (dont nous passons la preuve qui se trouve dans [CDFG]), on a muni $\mathbb{P}^1$ de la métrique sphérique à courbure constante positive qui s'écrit dans l'une des 2 cartes de $\mathbb{P}^1$: $\mid ds \mid = \frac{|dz|}{1+|z|^2}$. Si γ est une transformation de Moebius, $d\gamma$ désigne la dérivée de γ et $\mid d\gamma \mid (z)$ est la norme sphérique en z. Enfin, si $z \in \mathbb{P}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $D(z, \alpha)$ désigne le disque de centre z et de rayon α (pour la distance associée à la métrique sphérique). Montrons que ce lemme implique la proposition : Grâce aux propriétés (a) et (c) du lemme précédent, on montre qu'on peut construire pour tout $n \in \mathbb{N}$, un chemin C^∞ $c_n : [0, 1] \to \tilde{\Sigma}$ joignant p_0 à $\alpha_n(p_0)$, de longueur bornée par une consatnte indépendante de n et telle que pour n assez grand $\mathscr{D} \circ c_n$ ne rencontre pas B_{n-1}. On construit alors le chemin $c : [0, \infty[\to \tilde{\Sigma}$ comme la concaténation infini des chemins $a_n := A_{n-1}c_n$ (joignant $A_{n-1}(p_0)$ à $A_n(p_0)$). Par ρ-équivariance, on a :
   $$\mathscr{D} \circ a_n = \rho(A_{n-1}) \circ \mathscr{D} \circ c_n$$
   Comme $\mathscr{D} \circ c_n$ ne rencontre pas B_{n-1}, on en déduit, par la propriété (a) du lemme précédent que la longueur de $\mathscr{D} \circ a_n$ tend exponentiellement

vite vers 0 et donc $\mathscr{D} \circ c(t)$ converge, quand t tend vers l'infini, vers un point dans $\mathbb{P}^1$, ce point ne pouvant être que z (car par la propriété (b) du lemme précédent, $\mathscr{D} \circ a_n \subset D(z, \frac{cste}{2^{n-1}})$). Ainsi z est un point singulier pour le prolongement analytique de h.

■

Nous venons de montrer que pour une structure projective sur une surface de Riemann hyperbolique analytiquement finie d'application développante $\mathscr{D}$ et de groupe de monodromie Γ dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$; si $z_0 \in \mathbb{P}^1$ et h est un germe d'holonomie d'une section locale de $\mathscr{D}$ en z_0, alors pour tout z appartenant à $\mathbb{P}^1$, il existe un chemin continu $b : [0, T] \to \mathbb{P}^1$ joignant z_0 à z ($b(0) = z_0$, $b(T) = z$) tel que h se prolonge le long de $b([0, T - \epsilon])$ pour tout $\epsilon > 0$ mais pas le long de $b([0, T])$. On aurait envie de généraliser ce résultat à presque toute trajectoire brownienne partant de z_0, c'est à dire de montrer que pour presque tout $\omega \in \Omega_{z_0}$, il existe un temps d'arrêt $T(\omega) < +\infty$ tel que h se prolonge le long de $\omega([0, T(\omega) - \epsilon])$ mais pas le long de $\omega([0, T(\omega)])$. Pour y arriver, il parait naturel, en restant dans l'esprit de la preuve de la proposition précédente, de montrer que pour presque toute trajectoire browniennne ω partant de p_0 dans dans $\tilde{\Sigma}$, il existe $z(\omega) \in \mathbb{P}^1$ tel que $\lim_{t \to \infty} \mathscr{D}(\omega(t)) = z(\omega)$. Or il n'en est rien comme le montre le théorème (1.3).

Remarquons que si le groupe de monodromie Γ est dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$, alors les 2 hypothèses du théorème (1.3) sont vérifiées. En effet si Γ est élémentaire, il est évident que Γ n'est pas dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$ et si $\mathscr{D}$ n'est pas surjective alors $(Im(\mathscr{D}))^c$ est un fermé non vide Γ-invariant strictement inclus dans $\mathbb{P}^1$. Donc Γ n'est pas dense dans $PSl(2, \mathbb{C})$.

Plaçons nous sous les hypothèses du théorème (1.5). Bien que pour une trajectoire brownienne typique ω partant de p_0 dans $\tilde{\Sigma}$, $\mathscr{D}(\omega(t))$ n'ait pas de limite quand t tend vers l'infini, il existe un point de $\mathbb{P}^1$ près duquel $\mathscr{D}(\omega(t))$ passe presque tout son temps t. C'est ce qu'exprime le théorème (1.5).

Pour prouver ces 2 théorèmes (1.3 et 1.5), nous aurons besoin de résultats concernant la théorie des marches aléatoires dans les groupes. C'est l'objet de la section qui suit. Nous y définissons la notion de mesure stationnaire, énonçons et redémontrons quelques résultats de base de la théorie pour finir par la preuve de la proposition (7.1) qui est un point clef de la preuve des 2 théorèmes.

7 Marches aléatoires dans les sous-groupes de $PSl(2,\mathbb{C})$

7.1 Introduction

Dans toute cette partie, Γ est un sous groupe de $PSl(2,\mathbb{C})$ de type fini et μ une mesure de probabilité sur Γ. Notons $supp(\mu)$ le support de μ et $< supp(\mu) >$ le groupe engendré par $supp(\mu)$. Considérons la marche aléatoire droite sur Γ de loi μ. Plus précisemment, posons $\Omega = \Gamma^{\mathbb{N}^*}$, τ la tribu cylindrique sur Ω et $\mathbb{P} = \mu^{\mathbb{N}^*}$. Les applications coordonnées $h_i : \Omega \to \Gamma$ sont des variables aléatoires $\mathbb{P}$-indépendantes identiquement distribuées de loi μ. Posons $X_n(\omega) = h_1(\omega)...h_n(\omega)$. L'objet de cette partie est d'étudier l'action de X_n sur $\mathbb{P}^1$. Précisons quelques notations : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on note $[X]$ sa classe dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} / \mathbb{C}^*$. On a l'action naturelle :

$$\begin{array}{ccc} PSl(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nous travaillerons avec la distance naturelle sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1$ définie pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par

$$d([X],[Y]) = \frac{| x_1 y_2 - y_1 x_2 |}{\sqrt{| x_1 |^2 + | x_2 |^2}\sqrt{| y_1 |^2 + | y_2 |^2}}$$

Notons $D(x,\alpha)$ le disque de centre x et de rayon α. Enfin, si $g \in PSl(2,\mathbb{C})$, $|| g || = \sup_{||X||=1} || gX ||$, où $|| X ||$ est la norme euclidienne du vecteur $X \in \mathbb{C}^2$. Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant, peut-être bien connu des spécialistes mais pour lequel je ne connais pas de référence précise :

Proposition 7.1. *sous les hypothèses suivantes :*

1. $\int_\Gamma log(|| \gamma ||) \mathrm{d}\mu(\gamma) < +\infty$
2. $< supp(\mu) >$ *est non compact et n'a pas de sous groupe d'indice fini réductible.*

Alors, il existe $0 < \lambda' < \lambda''$ *tels que pour* $\mathbb{P}$*-preque tout* $\omega \in \Omega$*, il existe* $N(\omega)$ *tel que, pour tout* $n > N(\omega)$*, il existe* $y_n(\omega), z_n(\omega) \in \mathbb{P}^1$ *tel que :*

1. $X_n(\omega)((D(y_n(\omega), e^{-\lambda' n}))^c) \subset D(z_n(\omega), e^{-\lambda' n})$
2. $d(X_n(\omega)(D(y_n(\omega), e^{-2\lambda'' n})), z_n(\omega)) \geq \frac{1}{2}$

Nous redémontrons également le résultat classique suivant :

Théorème 7.2. *[Fur2] Soit* ν *une mesure* μ*-stationnaire sur* $\mathbb{P}^1$*. Supposons de plus que* $< supp(\mu) >$ *est non élémentaire. Alors, pour presque tout* $\omega \in \Omega$*, il existe* $z(\omega)$ *tel que la suite de mesures* $X_n(\omega).\nu$ *converge faiblement vers la mesure de Dirac* $\delta_{z(\omega)}$*.*

Nous expliquerons la notion de mesure μ-stationnaire dans la sous-section suivante.

Remarque 7.3. *Une fois les théorèmes prouvés, il ne sera pas difficile de se convaincre que la suite des* $z_n(\omega)$ *définie dans la proposition (7.1) converge vers le* $z(\omega)$ *défini au théorème (7.2)*

7.2 Mesures stationnaires

Dans cette sous-partie, je définis la notion de mesures stationnaires, énonce et démontre les résultats de base. La présentation est largement inspirée de [Ma].

L'action de Γ sur $\mathbb{P}^1$ nous fournit une action de Γ sur l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{P}^1)$ des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{P}^1$: celle-ci est définie pour $\gamma \in \Gamma$, $\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{P}^1)$ et A borélien dans $\mathbb{P}^1$ par $\gamma \cdot \nu(A) = \nu(\gamma^{-1}(A))$.

On définit également les mesures de convolution. $\mu^{*n} := \mu * \mu * ... * \mu$ est la mesure image sur Γ de la mesure produit $\mu^{\otimes n}$ sur Γ^n par l'application produit $\Gamma \times ... \times \Gamma \to \Gamma$, $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \mapsto \gamma_1 ... \gamma_n$. La loi de X_n est μ^{*n}. De même, si $\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{P}^1)$, on définit la mesure $\mu * \nu$ comme la mesure image sur $\mathbb{P}^1$ de la mesure produit sur $\Gamma \times \mathbb{P}^1$ par l'application $\Gamma \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $(\gamma, x) \mapsto \gamma.x$. Donc si A est un borélien de $\mathbb{P}^1$:

$$\mu * \nu(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma) \nu(\gamma^{-1}(A))$$

et si f est une fonction continue sur $\mathbb{P}^1$:

$$\mu * \nu(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma) \int_{x \in \mathbb{P}^1} f(\gamma x) d\nu(x)$$

Definition 7.4. *La mesure $\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{P}^1)$ est dite μ-stationnaire (ou μ-harmonique) si $\mu * \nu = \nu$, c'est à dire si pour tout borélien A dans $\mathbb{P}^1$, on a :*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma)\nu(\gamma^{-1}(A)) = \nu(A)$$

Proposition 7.5. *[Fur] Il existe une mesure μ-stationnaire sur $\mathbb{P}^1$.*

Démonstration. En effet, si $x \in \mathbb{P}^1$, la suite de mesures de probabilités :

$$\nu_n = \frac{1}{n+1}.(\delta_x + \mu * \delta_x + ... + \mu^{*n} * \delta_x)$$

est une suite d'éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{P}^1)$ qui est compact pour la topologie faible. On vérifie facilement que toute valeur d'adhérence de cette suite est une mesure μ-stationnaire. ■

Proposition 7.6. *[Wo] Si $< supp(\mu) >$ est non élémentaire, alors ν est sans atome.*

Démonstration. Supposons le contraire. Notons M l'ensemble des atomes de poids maximal. M est invariant par l'action de $< supp(\mu) >$. En effet soit $x_0 \in M$. On a :

$$\nu(\{x_0\}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma)\nu(\{\gamma^{-1}(x_0)\}) \tag{1}$$

Or pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\nu(\{\gamma^{-1}(x_0)\}) \leq \nu(\{x_0\})$. On en déduit, grâce à l'équation 1, que pour tout $\gamma \in supp(\mu)$, $\nu(\{\gamma^{-1}(x_0)\}) = \nu(\{x_0\})$. Donc pour tout γ appartenant au semi-groupe engendré par le support de μ, on a $\gamma^{-1}M \subset M$. Comme M est fini, on en déduit que $\gamma^{-1}M = M$. Donc M est invariant par l'action de $< supp(\mu) >$ et est un ensemble fini, ce qui est impossible car $< supp(\mu) >$ est non élémentaire. ■

Le théorème qui est à la base de toute la théorie des marches aléatoires est le suivant :

Théorème 7.7. *[Fur2] Soit ν une mesure μ-stationnaire sur $\mathbb{P}^1$. Alors, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une mesure $\lambda(\omega) \in \mathscr{P}(\mathbb{P}^1)$ tel que la suite de variable aléatoire $X_n(\omega).\nu$ converge faiblement vers $\lambda(\omega)$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{P}^1$, notons $M_n^f := X_n.\nu(f) = \int_{\mathbb{P}^1} f(X_n.x)d\nu(x)$. La suite de variables aléatoires $(M_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale relativement à la filtration canonique $\mathscr{F}_n$ associée à la suite X_n. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}^f/\mathscr{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{P}^1} f(X_{n+1}.x)d\nu(x)/\mathscr{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{P}^1} f(X_n.h_{n+1}.x)d\nu(x)/\mathscr{F}_n\right] \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma). \int_{\mathbb{P}^1} f(X_n.\gamma.x)d\nu(x) \\
&= \int_{\mathbb{P}^1} f(X_n.x)d(\mu * \nu)(x) \\
&= \int_{\mathbb{P}^1} f(X_n.x)d(\nu)(x) = M_n^f
\end{aligned}$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{P}^1)$. La suite $(M_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée donc est presque-sûrement convergente. Donc, pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{P}^1)$, il existe Ω_f tel que $\mathbb{P}(\Omega_f) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_f$, on ait $\lim_{n\to\infty} M_n^f(\omega) = \Lambda(\omega, f)$. Or, $\mathscr{C}^0(\mathbb{P}^1)$ est séparable c'est à dire contient un sous ensemble D dénombrable et dense pour la norme sup. Soit $\Omega' = \bigcap_{f\in D} \Omega_f$. On a $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega'$, l'application $\Lambda_\omega : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \Lambda(\omega, f)$ est uniformément continue (elle est 1-lipschitzienne). Λ_ω se prolonge donc en une application toujours notée $\Lambda_\omega : \mathscr{C}^0(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{R}$. L'application Λ_ω est alors une forme linéaire continue positive et vérifie $\Lambda_\omega(1) = 1$. Donc, par le théorème de représentation de Riesz, pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe une mesure de probabilité $\lambda(\omega)$ vérifiant pour tout $f \in \Omega'$, $\Lambda_\omega(f) = \int_{\mathbb{P}^1} fd\lambda(\omega)$. Donc pour tout $\omega \in \Omega'$, $X_n(\omega).\nu$ converge faiblement vers $\lambda(\omega)$.

■

7.3 preuve du théorème (7.2)

La preuve qui suit de ce résultat classique est largement inspiré de [Bou]. Pour prouver le théorème, il nous suffit de montrer que la mesure λ obtenue dans le théorème (7.7) est un Dirac.

Nous commençons par démontrer la proposition suivante :

Proposition 7.8. *soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in PSl(2,\mathbb{C})$ *tel que* $\| g_n \| \to \infty$*, alors il existe une sous suite* n_i *et il existe* $y, z \in \mathbb{P}^1$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{P}^1 - \{y\}$*, on ait* $\lim_{i\to\infty} g_{n_i}.x = z$*.*

La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant (on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$) :

Lemme 7.9. *si* $\| g_n \| \to \infty$ *et* $\| g_n e_1 \| \geq \| g_n e_2 \|$ *et si* z *est une valeur d'adhérence de* $g_n[e_1]$*, alors il existe une sous suite* n_i *et il existe* $y \in \mathbb{P}^1$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{P}^1 - \{y\}$*, on ait* $\lim_{i\to\infty} g_{n_i}.x = z$

Démonstration. Soit z une valeur d'adhérence de $g_n[e_1]$. Quitte à extraire : $g_n.[e_1] \to z$. Posons $g_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et $g'_n = \begin{pmatrix} a'_n & b'_n \\ c'_n & d'_n \end{pmatrix} := \frac{1}{\|g_n e_1\|} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Comme $\| g_n e_1 \| \geq \| g_n e_2 \|$, on a : $| a'_n | \leq 1$, $| b'_n | \leq 1$, $| c'_n | \leq 1$ et $| d'_n | \leq 1$ et donc quitte à extraire à nouveau, a'_n, b'_n, c'_n et d'_n tendent respectivement vers a, b, c et d. Remarquons que :

$$ad - bc = \lim_{n\to\infty} \frac{det(g_n)}{\| g_n e_1 \|^2} = 0$$

On a :

$$g_n[e_1] = \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_n \\ c'_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Pour tout $x \in \mathbb{P}^1 - \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$,on a : $g_n x \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$.

En effet, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que $[X] \neq \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ $(= \begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix})$. On a :

$$g_n[X] = \begin{bmatrix} a'_n x_1 + b'_n x_2 \\ c'_n x_1 + d'_n x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

– premier cas : $c \neq 0$. Alors :

$$\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(ax_1 + bx_2) \\ c(cx_1 + dx_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(cx_1 + dx_2) \\ c(cx_1 + dx_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

– deuxième cas : $c = 0$. Alors $| a | = 1$ et $d = 0$. Donc $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et

$$\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses du théorème (7.2). On a alors :

Lemme 7.10. *presque sûrement :* $\sup_{n\geq 0} \| X_n \| = +\infty$.

Démonstration. Sinon il existe $A \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\omega \in A$, on ait $\| X_n(\omega) \| \leq M$. Comme $< supp(\mu) >$ n'est pas un groupe élémentaire, on a pour n assez grand :

$$\mathbb{P}\left(\| h_1(\omega)...h_n(\omega) \| > M^2\right) > 0$$

Donc par indépendance des h_i, on a :

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i\in\mathbb{N}} \| h_{in+1}(\omega)...h_{(i+1)n}(\omega) \| > M^2\right) = 1$$

Donc, il existe $\omega \in A$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\| h_{in+1}(\omega)...h_{(i+1)n}(\omega) \| > M^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} M^2 &< \| h_{in+1}(\omega)...h_{(i+1)n}(\omega) \| \\ &= \| X_{in}(\omega)^{-1} X_{(i+1)n}(\omega) \| \\ &\leq \| X_{in}(\omega)^{-1} \| . \| X_{(i+1)n}(\omega) \| \\ &= \| X_{in}(\omega) \| . \| X_{(i+1)n}(\omega) \| \\ &\leq M^2 \end{aligned}$$

Contradiction. (on a utilisé à la quatrième ligne le fait que pour $g \in Sl(2,\mathbb{C})$, $\| g \| = \| g^{-1} \|$) ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que les mesures $\lambda(\omega)$ définies au théorème (7.7) sont des Diracs $\delta_{z(\omega)}$. D'après le lemme précédent (7.10), pour presque tout ω il existe n_i tel que $\lim_{i\to\infty} \| X_{n_i}(\omega) \| = +\infty$. Donc, d'après la proposition (7.8), quitte à extraire, il existe $y(\omega), z(\omega) \in \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{P}^1 - \{y(\omega)\}$, on ait $\lim_{i\to\infty} X_{n_i}(\omega).x = z(\omega)$. Or ν est sans atome. Donc $X_{n_i}(\omega)\nu \longrightarrow \delta_{z(\omega)}$. Et donc $\lambda(\omega) = \delta_{z(\omega)}$.

7.4 preuve de la proposition (7.1)

Sous les hypothèses de la proposition, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{P}$-preque sûrement, on ait :

$$\frac{1}{n}\log \| X_n \| \longrightarrow \lambda \tag{2}$$

Remarque 7.11. *1. λ est appelé l'exposant de Lyapounov de la marche aléatoire.*

2. Le fait que $\frac{1}{n}\log \| X_n \|$ converge presque sûrement fut originellement prouvé dans [KF] et est en fait une simple conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingmann. Ce fait utilise la première hypothèse de la proposition ($\int_\Gamma log(\| \gamma \|)\mathrm{d}\mu(\gamma) < +\infty$).

3. Le fait que la limite soit strictement positive est une conséquence de l'autre hypothèse de la proposition ($<supp(\mu)>$ est non compact et n'a aucun sous groupe d'indice fini réductible) et sa preuve peut être trouvée par exemple dans [Fur].

Prenons λ' et λ'' tels que $0 < \lambda' < \lambda < \lambda''$. $\mathbb{P}$-presque sûrement, on a pour n assez grand :

$$e^{\lambda' n} \leq \| X_n \| \leq e^{\lambda'' n} \tag{3}$$

Rappelons la décomposition de Cartan d'un élément de $Gl(2,\mathbb{C})$. Si $g \in Gl(2,\mathbb{C})$, il existe k, k' appartenant au groupe des matrices orthogonales $O(2,\mathbb{C})$ et $a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale (avec $a_1 \geq a_2$) tels que $g = kak'$. Appliquons cette décomposition à X_n : on a $X_n = k_n a_n k'_n$ avec $k_n \in O(2,\mathbb{C})$ et $a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}$ et $| \alpha_n | \geq 1$. Comme $\| a_n \| = | \alpha_n |$, que k_n préserve la norme et par l'équation (3), on obtient :

$$e^{\lambda' n} \leq | \alpha_n | \leq e^{\lambda'' n} \tag{4}$$

Lemme 7.12. *si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et $a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ avec $| \alpha |^2 > \sqrt{\frac{3}{2}}$ alors on a :*

1. $d([X],[e_2]) \geq | \alpha |^{-1} \Rightarrow d([aX],[e_1]) \leq | \alpha |^{-1}$

2. $d([X],[e_2]) \leq \mid \alpha \mid^{-2} \Rightarrow d([aX],[e_1]) \geq \frac{1}{2}$

Démonstration. Travaillons dans la carte $U_1 = \{[X] = [x_1, x_2]; x_1 \neq 0\} \to \mathbb{C}, [x_1, x_2] \longmapsto \frac{x_2}{x_1} = z$. On a :

$$d([X],[e_2]) = \frac{1}{\sqrt{1+\mid z\mid^2}}$$

Donc

$$d([X],[e_2]) \geq \mid \alpha \mid^{-1} \Leftrightarrow \mid z \mid^2 \leq \mid \alpha \mid^2 -1$$

et

$$d([X],[e_2]) \leq \mid \alpha \mid^{-2} \Leftrightarrow \mid z \mid^2 \geq \mid \alpha \mid^4 -1$$

On calcule :

$$d([aX],[e_1]) = \frac{\mid \alpha \mid^{-2} \mid z \mid}{\sqrt{1+\mid \alpha \mid^{-4} \mid z \mid^2}}$$

Poson $\beta = \mid \alpha \mid^{-2}$ et $f(x) = \frac{\beta x}{\sqrt{1+\beta^2 x^2}}$. Il s'agit de montrer que :

1. $x \leq \sqrt{\frac{1}{\beta} - 1} \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{\beta}$
2. $x \geq \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{\beta}{(1+\beta^2 x^2)^{3/2}} > 0$. Donc f est croissante et donc :

$$x \leq \sqrt{\frac{1}{\beta} - 1} \Rightarrow x \leq \sqrt{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow f(x) \leq f(\sqrt{\frac{1}{\beta}}) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \leq \sqrt{\beta}$$

ce qui montre le premier point. Pour le deuxième, on a :

$$x \geq \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1} \Rightarrow f(x) \geq f(\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{2-\beta^2}} \geq \frac{1}{2}$$

pour $\beta \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ (ie pour $\mid \alpha \mid^2 \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$). ■

On peut à présent terminer la preuve du théorème en utilisant le lemme précédent et le fait qu'une transformation orthogonale préserve la distance d. En effet, pour n assez grand, on a :

$$\begin{aligned} a_n((D([e_2], e^{-\lambda' n}))^c) &\subset a_n((D([e_2], \mid \alpha_n \mid^{-1}))^c) \\ &\subset D([e_1], \mid \alpha_n \mid^{-1}) \\ &\subset D([e_1], e^{-\lambda' n}) \end{aligned}$$

Donc :

$$a_n k'_n((D([k'^{-1}_n e_2], e^{-\lambda' n}))^c) \subset D([e_1], e^{-\lambda' n})$$

Par conséquent :

$$k_n a_n k'_n((D([k'^{-1}_n e_2], e^{-\lambda' n}))^c) \subset D([k_n e_1], e^{-\lambda' n})$$

Donc si on pose : $y_n = k'^{-1}_n([e_2])$ et $z_n = k_n([e_1])$, on obtient pour n assez grand :

$$X_n((D(y_n, e^{-\lambda' n}))^c) \subset D(z_n), e^{-\lambda' n})$$

On obtient la deuxième assertion par un raisonnement analogue. Pour n assez grand :

$$\begin{aligned} a_n(D([e_2], e^{-2\lambda'' n})) &\subset a_n(D([e_2], \mid \alpha_n \mid^{-2})) \\ &\subset (D([e_1], \frac{1}{2}))^c \end{aligned}$$

Donc, pour n assez grand :

$$X_n(D(y_n, e^{-2\lambda'' n})) \subset (D(z_n, \frac{1}{2}))^c$$

Prouvons à présent la remarque (7.3) Soit α une valeur d'adhérence de z_n différente de z. Soit n_i tel que $\lim_{i\to\infty} z_{n_i} = \alpha$. Par le théorème (7.2), presque sûrement $X_{n_i}.\nu(D(\alpha, \frac{d(z,\alpha)}{2}) \to \delta_z(D(\alpha, \frac{d(z,\alpha)}{2})) = 0$. Par la proposition (7.1), on en déduit que $\nu(D(y_{n_i}, e^{-\lambda' n_i})) \to 1$. Quitte à extraire à nouveau, on peut supposer $y_{n_i} \to y \in \mathbb{P}^1$. On aurait alors que $\nu(\{y\}) = 1$, ce qui contredit le fait que ν est sans atome.

8 Le procédé de discrétisation de Furstenberg-Lyons-Sullivan

Ce procédé va nous permettre d'associer à une trajectoire brownienne dans $\mathbb{D}$ une marche aléatoire droite dans $\Pi_1(\Sigma)$ et d'appliquer les résultats de la partie précédente. Les preuves des résultats annoncés peuvent être trouvées dans [LS] et nous suivons la présentation de [KL]. Soit Σ une surface de Riemann hyperbolique et analytiquement finie. So groupe fondamental $\Pi_1(\Sigma)$ agit sur $\tilde{\Sigma}$ $(= \mathbb{D})$, le revêtement universel de Σ, par isométrie pour la métrique de Poincaré du disque. Pour tout X appartenant à $\Pi_1(\Sigma)$, on définit : $F_X = X.D(0,\delta)$ et $V_X = X.D(0,\delta')$ (disques fermés) avec $\delta < \delta'$ et δ choisis suffisamment petits pour que les F_X soient 2 à 2 disjoints. Notons $(\Omega_x, \mathbb{P}_x)$ l'ensemble des trajectoires browniennes partant de x dans $\mathbb{D}$ muni de la mesure de Wiener associée à la métrique de Poincaré du disque. La réunion $\bigcup\limits_{X\in\Pi_1(\Sigma)} F_X$ est un ensemble récurrent pour le mouvement brownien (car Σ est analytiquement finie). Pour $x \in F_e$, notons $\epsilon_x^{\partial V_e}$ la mesure de sortie de V_e d'un brownien partant de x. La constante de Harnack C' du couple (F_e, V_e) est définie par :

$$C' = \sup\left\{\frac{d\epsilon_x^{\partial V_e}}{d\epsilon_y^{\partial V_e}}(z); x, y \in F_e, z \in \partial V_e\right\}$$

où $\frac{d\epsilon_x^{\partial V_e}}{d\epsilon_y^{\partial V_e}}$ est la dérivée de Radon-Nikodym. Remarquons que les éléments de $\Pi_1(\Sigma)$ agissant par isométrie sur $\mathbb{D}$, la constante de Harnack du couple (F_X, V_X) est la même pour tout $X \in \Pi_1(\Sigma)$.

Si $\omega \in \Omega_x$, $x \in V_e$, on définit :

$$S_0(\omega) = \inf\{t \geq 0; \omega(t) \notin V_e\}$$

et, pour $n \geq 1$:

$$R_n(\omega) = \inf\{t \geq S_{n-1}(\omega); \omega(t) \in \cup F_X\}$$

$$S_n(\omega) = \inf\{t \geq R_n(\omega); \omega(t) \notin \cup V_X\}$$

On définit également :

$$X_n(\omega) \text{ par } w(R_n(\omega)) \in F_{X_n(\omega)}$$

$$\kappa_n(\omega) = \frac{1}{C}\left(\frac{d\epsilon_{X_n(\omega).0}^{\partial V_{X_n(\omega)}}}{d\epsilon_{\omega(R_n(\omega))}^{\partial V_{X_n(\omega)}}}(\omega(S_n(\omega)))\right)$$

où C est une constante choisie de sorte qu $C' < C$. On a, par définition de C, C' et κ_n : $\frac{1}{C^2} \leq \kappa_n \leq \frac{C'}{C} < 1$.

Notons $(\Omega_0 \times [0,1]^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_0 \otimes leb^{\otimes \mathbb{N}}) = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbb{P}})$. Soit $N_k : \tilde{\Omega} \to \mathbb{N} : (\omega, \alpha) = (\omega, (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \tilde{\omega} \mapsto N_k(\tilde{\omega})$ la variable aléatoire définie par :

$$N_0(\tilde{\omega}) = 0$$

$$N_k(\omega, \alpha) = \inf\{n > N_{k-1}(\omega, \alpha); \alpha_n < \kappa_n(\omega)\}$$

Notons également : $\gamma_n = X_n^{-1}X_{n+1}$ Le théorème essentiel est le suivant :

Théorème 8.1. *[LS] il existe μ une mesure de probabilité sur $\Pi_1(\Sigma)$ (la loi de X_{N_1}) telle que si A est un borélien de $\mathbb{D}$:*

$$\tilde{\mathbb{P}}(X_{N_1} = x_1; ...; X_{N_k} = x_k, \omega(S_{N_k}) \in A)) = \mu(x_1)\mu(x_1^{-1}x_2)...\mu(x_{k-1}^{-1}x_k)\epsilon_{x_k.0}^{\partial V_{x_k}}(A)$$

Corollaire 8.2. *[LS] $(X_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une réalisation d'une marche aléatoire droite sur $\Pi_1(\Sigma)$ de loi μ, c'est à dire que $(\gamma_{N_k} := X_{N_k}^{-1}X_{N_{k+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ.*

Nous aurons également besoin des propriétés suivantes :

Proposition 8.3.
1. *Il existe un réel $T > 0$ tel que presque sûrement $\frac{S_{N_k}}{k}$ tende vers T quand k tend vers l'infini.*
2. *La mesure μ a pour support $\Pi_1(\Sigma)$ tout entier et a un premier moment fini par rapport à la distance d associée à la métrique de Poincaré de $\mathbb{D}$, c'est à dire que $\int_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} d(\gamma.0, 0)\, d\nu(\gamma) < +\infty$*

9 Preuve du théorème (1.3)

Pour simplifier l'écriture, on prend $x_0 = 0$ et $\omega \in \Omega_0$. Pour prouver ce théorème, nous allons utiliser le processus de discrétisation de la partie précédente et la proposition (7.1). Pour simplifier les notations, prenons $x_0 = 0$. Si $\tilde{\omega} = (\omega, \alpha) \in \Omega$, ω s'écrit comme une concaténation infinie de chemins :

$$\omega = \omega_0 * \beta_1 * \omega_1 * \beta_2 * \omega_2 ...$$

où $\omega_0 = \omega_{|[0,R_{N_1}]}$ et pour $k \geq 1$, $\beta_k = \omega_{|[R_{N_k},S_{N_k}]}$ et $\omega_k = \omega_{|[S_{N_k},R_{N_{k+1}}]}$. Posons $c_k = X_{N_k}^{-1}.\omega_k$. On a alors :

$$\omega = \omega_0 * \beta_1 * X_{N_1}c_1 * \beta_2 * X_{N_2}c_2 ...$$

et par ρ-équivariance :

$$\mathscr{D}(\omega) = \mathscr{D}(\omega_0) * \mathscr{D}(\beta_1) * \rho(X_{N_1})\mathscr{D}(c_1) * \mathscr{D}(\beta_2) * \rho(X_{N_2})\mathscr{D}(c_2) ...$$

On va maintenant pousser en avant par le morphisme ρ la marche aléatoire droite X_{N_k} dans $\Pi_1(\Sigma)$ afin d'obtenir une marche aléatoire droite dans Γ et d'appliquer la proposition (7.1). Pour cela, notons $\tilde{\mu} = \rho_* \mu$ (où μ est la mesure sur $\Pi_1(\Sigma)$ définie par le processus de discrétisation de la section précédente (8.1)) et $Y_{N_k} = \rho(X_{N_k})$. Le processus $(Y_{N_k})_{k \geq 0}$ est une réalisation de la marche aléatoire droite sur Γ de loi $\tilde{\mu}$. Notons qu'il existe une constante a telle que pour tout $\gamma \in \Pi_1(\Sigma)$, on ait $log(|| \rho(\gamma) ||) \leq a.d(0, \gamma.0)$. On en déduit, en utilisant la deuxième partie de la proposition (8.3), que l'intégrale $\int_{\gamma \in \Pi_1(\Sigma)} log(|| \rho(\gamma) ||) \, d\mu(\gamma) < +\infty$ et donc que $\int_{\gamma \in \Gamma} log(|| \gamma ||) \mathrm{d}\tilde{\mu}(\gamma) < +\infty$. Les hypothèses de la proposition (7.1) sont donc satisfaites. Par conséquent, il existe $0 < \lambda' < \lambda''$ tels que pour $\tilde{\mathbb{P}}$-preque tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, il existe $N(\tilde{\omega})$ tel que pour tout $k > N(\tilde{\omega})$, il existe $y_k(\tilde{\omega}), z_k(\tilde{\omega}) \in \mathbb{P}^1$ tel que :

1. $Y_{N_k}((D(y_k, e^{-\lambda' k}))^c) \subset D(z_k, e^{-\lambda' k})$
2. $d(Y_{N_k}(D(y_k, e^{-2\lambda'' k})), z_k) \geq \frac{1}{2}$

Donc, si on montre que pour presque tout $\tilde{\omega}$, il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que :

$$\mathscr{D}(c_{k_n}) \cap D(y_{k_n}, e^{-2\lambda'' k_n}) \neq \varnothing \text{ et } \mathscr{D}(c_{k_n}) \cap (D(y_{k_n}, e^{-\lambda' k_n}))^c \neq \varnothing$$

alors le théorème suivra immédiatement. En effet, on aura alors que, pour une infinité de k, la portion de chemin $\rho(X_{N_k})\mathscr{D}(c_k)$ de $\mathscr{D}(\omega)$ visite à la fois

$D(z_k, e^{-\lambda' k})$ et $D(z_k, \frac{1}{2})^c$, ce qui empêche $\mathscr{D}(\omega(t))$ d'avoir une limite quand t tend vers l'infini.

Pour montrer ceci, posons :

$$E_k = \{\mathscr{D}(c_k) \cap D(y_k, e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\mathscr{D}(c_k) \cap (D(y_k, e^{-\lambda' k}))^c \neq \varnothing\}$$

Il s'agit de montrer que

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} E_k) = 1 \tag{5}$$

Il s'avère que la suite $(\tilde{\mathbb{P}}(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est non sommable (nous verrons plus loin que $\tilde{\mathbb{P}}(E_k)$ est minorée par $\frac{cste}{k}$). Donc si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ était une suite d'événements indépendants, on pourrait conclure immédiatement grâce au lemme de Borel-Cantelli. Mais, il n'est pas difficile de se convaincre que ces E_k ne sont pas indépendants. Pour contourner ce problème, nous allons démontrer l'affirmation suivante :

$$\exists c > 0,\ \exists N_0 > 0 \text{ tel que } \forall N \geq N_0,\ \forall k > N,\ \tilde{\mathbb{P}}(E_k | E^c_{k-1}, ...E^c_N) \geq \frac{c}{k} \tag{6}$$

Commençons par montrer que (6) implique (5). Pour montrer (5), il suffit de montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E^c_n) = 0$. Fixons $N \geq N_0$:

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{n=N}^{\infty} E^c_n) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{n=N}^{k} E^c_n)$$

Soit $k > N$. Posons $u_k = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap\limits_{n=N}^{k} E^c_n)$ et $\alpha_k = \tilde{\mathbb{P}}(E^c_k / E^c_{k-1}, ...E^c_N)$. On a :

$$
\begin{aligned}
u_k &= \alpha_k . u_{k-1} \\
&= \alpha_k \alpha_{k-1} ... \alpha_{N+1} . u_N \\
&\leq (1 - \frac{c}{k})(1 - \frac{c}{k-1}) ... (1 - \frac{c}{N+1}) . u_N \\
&= \prod_{n=N+1}^{k} (1 - \frac{c}{n}) . u_N \\
&\leq \prod_{n=N+1}^{k} e^{-\frac{c}{n}} . u_N \\
&= \exp(- \sum_{n=N+1}^{k} \frac{c}{n}) . u_N \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

On a donc $\forall N > N_0$, $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n^c) = 0$. Et si $N < N_0$, on a $\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n^c \subset \bigcap\limits_{n=N_0}^{\infty} E_n^c$. Donc $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n^c) = 0$.

Nous allons maintenant montrer l'inégalité (6). Pour montrer ceci, nous aurons besoin du lemme suivant qui, grossièrement parlant expriment le fait suivant : si $\mathscr{D}$ est surjectif, alors pour un certain $r > 0$, l'intersection du disque de centre 0 et de rayon r et de l'image réciproque par $\mathscr{D}$ d'un disque de rayon $e^{-2\lambda'' k}$ contient un disque dont rayon est de l'ordre de $e^{-2\lambda'' k}$. Plus précisément :

Lemme 9.1. $\exists \beta > 0$, $\exists r > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall y \in \mathbb{P}^1$, $\exists x \in D(0, r)$ *tel que* $\forall k \geq N_0$, *on ait :*

$$D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \subset \mathscr{D}^{-1}(D(y, e^{-2\lambda'' k}))$$

Démonstration. $\mathscr{D}$ est surjective, donc $\exists r > 0$ tel que $\mathscr{D}(D(0, r)) = \mathbb{P}^1$. Soit $\frac{1}{\beta} = \underset{D(0,2r)}{sup} \mid \mathscr{D}' \mid$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\beta e^{-2\lambda'' N_0} < r$. Soit $y \in \mathbb{P}_1$ et soit $x \in D(0, r)$ tel que $\mathscr{D}(x) = y$. Soit maintenant $k \geq N_0$ et $x_1 \in D(x, \beta e^{-2\lambda'' k})$. On a : $d(\mathscr{D}(x), \mathscr{D}(x_1)) \leq \underset{D(x, \beta e^{-2\lambda'' k})}{sup} \mid \mathscr{D}' \mid .d(x, x_1)$. Or par construction, $D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \subset D(0, 2r)$. On en déduit que $d(\mathscr{D}(x), \mathscr{D}(x_1)) \leq \frac{1}{\beta}.\beta.e^{-2\lambda'' k} = e^{-2\lambda'' k}$, ce qui termine la preuve du lemme. ∎

Nous pouvons à présent montrer l'inégalité (6). Remarquons tout d'abord que, pour k assez grand :

$$E_k = \Big\{ \mathscr{D}(c_k) \cap D(y_k, e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing \Big\}$$

En effet, $\big\{ \mathscr{D}(c_k) \cap (D(y_k, e^{-\lambda' k}))^c \neq \varnothing \big\} = \big\{ c_k \cap \mathscr{D}^{-1}(D(y_k, e^{-\lambda' k}))^c \neq \varnothing \big\}$ est un évènement certain pour k assez grand. Ceci est dû au fait que, si D est un disque dans $\mathbb{D}$, alors $\mathscr{D}^{-1}(D(y_k, e^{-\lambda' k})) \cap D$ est une réunion finie de disques topologiques de diamètre tendant vers 0 quand k tend vers l'infini, et le nombre de ces disques est majoré par le degré de $\mathscr{D}_{|D}$. Ainsi la suite c_k de chemins continus joignant ∂V_0 à $\cup F_\gamma$ ne peut, pour k assez grand, être incluse dans $\mathscr{D}^{-1}(D(y_k, e^{-\lambda' k}))$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand et $k > N$. Posons $D_k(\tilde{\omega}) = \mathscr{D}^{-1}(D(y_k(\tilde{\omega}), e^{-2\lambda'' k}))$ et fixons $\gamma \in \Pi_1(\Sigma)$. Nous allons montrer le lemme :

Lemme 9.2.

$$\tilde{\mathbb{P}}(E_k \,|\, E_{k-1}^c, ... E_N^c) \geq \inf_{x \in D(0,r)} \tilde{\mathbb{P}} \Big(\{ c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing \} \cap \{ \gamma_{N_1} = \gamma \} \Big)$$

Démonstration.

$$\tilde{\mathbb{P}}(E_k \,|\, E_{k-1}^c, ... E_N^c)$$

$$= \tilde{\mathbb{P}} \left(\{ c_k \cap D_k \neq \varnothing \} \ / \ \{ c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing \} \right)$$

$$\geq \tilde{\mathbb{P}} \left(\{ c_k \cap D_k \neq \varnothing \} \cap \{ \gamma_{N_k} = \gamma \} \,|\, \{ c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing \} \right)$$

$$= \tilde{\mathbb{P}} \left(\{ c_k \cap D_k \neq \varnothing \} \,|\, \{ \gamma_{N_k} = \gamma, c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing \} \right) . \tilde{\mu}(\gamma)$$

car les événements $\{ \gamma_{N_k}(\tilde{\omega}) = \gamma \}$ et $\{ c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing \}$ sont indépendants.

$$\geq \inf_{y \in \mathbb{P}^1} \tilde{\mathbb{P}} \Big(\{ c_k \cap \mathscr{D}^{-1}(D(y, e^{-2\lambda'' k})) \neq \varnothing \} \,|\, \{ \gamma_{N_k} = \gamma, \\ c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing \} \Big) . \tilde{\mu}(\gamma)$$

car $c_k(\tilde{\omega})$ et $y_k(\tilde{\omega})$ sont indépendants sachant $\gamma_{N_k}(\tilde{\omega}) = \gamma$: en effet, y_k dépend de γ_{N_k}. Mais, sachant $\gamma_{N_k} = \gamma$, y_k ne dépend pas du chemin c_k joignant ∂V_e à F_γ.

$$= \inf_{y \in \mathbb{P}^1} \tilde{\mathbb{P}}\Big(\{c_k \cap \mathscr{D}^{-1}(D(y, e^{-2\lambda'' k})) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_k} = \gamma\} \mid \{c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing\}\Big)$$

toujours car $\{\gamma_{N_k} = \gamma\}$ et $\{c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing\}$ sont indépendants.

$$= \inf_{y \in \mathbb{P}^1} \tilde{\mathbb{P}}\left(\{c_k \cap \mathscr{D}^{-1}(D(y, e^{-2\lambda'' k})) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_k} = \gamma\}\right)$$

car l'événement $\left\{c_k \cap \mathscr{D}^{-1}(D(y, e^{-2\lambda'' k})) \neq \varnothing \cap \gamma_{N_k} = \gamma\right\}$ est indépendant de l'événement $\{c_{k-1} \cap D_{k-1} = \varnothing, ..., c_N \cap D_N = \varnothing\}$.

$$\geq \inf_{x \in D(0,r)} \tilde{\mathbb{P}}\left(\{c_k \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_k} = \gamma\}\right)$$

cette dernière inégalité résulte du lemme (9.1).

$$= \inf_{x \in D(0,r)} \tilde{\mathbb{P}}\left(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_1} = \gamma\}\right)$$

■

Il reste donc à montrer qu' il existe une constante c telle que pour k assez grand, on ait :

$$\inf_{x \in D(0,r)} \tilde{\mathbb{P}}\left(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_1} = \gamma\}\right) \geq \frac{c}{k}$$

La preuve de ce fait est un peu technique mais repose sur l'idée simple suivante : pour calculer la valeur de

$$\inf_{x \in D(0,r)} \tilde{\mathbb{P}}\left(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_1} = \gamma\}\right)$$

on se ramène à étudier la probabilité qu'une trajectoire brownienne du plan euclidien partant du point d'affixe $\frac{1}{2}$ atteigne le disque de centre 0 et de rayon e^{-k} avant d'atteindre le bord du disque unité. En utilisant l'invariance du brownien par l'exponentielle complexe, cette probabilité est égale à la probabilité qu'une trajectoire brownienne partant du point d'affixe $-\log(2)$ atteigne la droite d'équation $x = -k$ avant d'atteindre la droite d'équation $x = 0$. Un calcul simple montre que cette probabilité vaut $\frac{\log(2)}{k}$.

Posons $\epsilon = \frac{\delta' - \delta}{4}$. Dans la suite, $\mathbb{P}_y$ désigne la mesure de Wiener d'un brownien partant de y (brownien associé à la métrique de Poincaré lorsque y sera dans le disque et associé à la métrique euclidienne lorsque y sera dans $\mathbb{C}$). Notons également $\mathbb{P}_m := \int \mathbb{P}_y dm(y)$ où m corresond à la mesure de sortie de $V_0 = D(0, \delta')$ d'un brownien partant de 0, c'est à dire la mesure uniforme sur $D(0, \delta')$. Notons enfin pour A borélien, et ω trajectoire brownienne, T_A le temps d'atteinte de A. Soit $x \in D(0, r)$. Nous allons distinguer 2 cas :

Premier cas : $x \in (D(\gamma.0, \delta + 2\epsilon))^c$ On a alors $D(x, \epsilon) \cap D(\gamma.0, \delta + \epsilon) = \varnothing$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{P}}(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_1} = \gamma\}) \\
&\geq \tilde{\mathbb{P}}(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_1 = \gamma\} \cap \{N_1 = 1\}) \\
&\geq \tilde{\mathbb{P}}(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_1 = \gamma\} \cap \{\alpha_1 \leq \frac{1}{C^2}\}) \\
&= \frac{1}{C^2}.\mathbb{P}_\mu(T_{D(x,\beta e^{-2\lambda'' k})} \leq T_{\cup F_\alpha} \cap T_{F_\gamma} \leq T_{\cup F_\alpha})
\end{aligned}$$

Si on prend k assez grand pour que $\beta e^{-2\lambda'' k} < \frac{\epsilon}{2}$, par la propriété de Markov forte, cette quantité est

$$\geq \frac{1}{C^2}.\mathbb{P}_\mu(T_{D(x,\frac{\epsilon}{2})} \leq T_{\cup F_\alpha}). \underset{y \in \partial D(x, \frac{\epsilon}{2})}{inf} \mathbb{P}_y(T_{D(x,\beta e^{-2\lambda'' k})} \leq T_{\partial D(x,\epsilon)})$$
$$. \underset{z \in \partial D(x,\epsilon)}{inf} \mathbb{P}_z(T_{F_\gamma} \leq T_{\cup F_\alpha})$$

Comme $x \in D(0, r)$, $\exists a > 0$ (indépendant de x) tel que :

$$\mathbb{P}_m(T_{D(x,\frac{\epsilon}{2})} \leq T_{\cup F_\alpha}). \underset{z \in \partial D(x,\epsilon)}{inf} \mathbb{P}_z(T_{F_\gamma} \leq T_{\cup F_\alpha}) \geq a$$

Lemme 9.3. *Il existe $b > 0$ (indépendant de x) tel que :*

$$\forall y \in \partial D(x, \frac{\epsilon}{2}), \mathbb{P}_y(T_{D(x,\beta e^{-2\lambda'' k})} \leq T_{\partial D(x,\epsilon)}) \geq \frac{b}{k}$$

Démonstration. Notons $D_{eucl}(x,\alpha)$ le disque de centre x et de rayon α dans $\mathbb{C}$ pour la distance euclidienne. Soit $y \in \partial D(x, \frac{\epsilon}{2})$. Il existe un biholomorphisme Ψ_k identifiant :
– $D(x, \beta e^{-2\lambda'' k})$ et $D_{eucl}(0, c_1 e^{-2\lambda'' k}) := D_1(k)$
– $D(x, \frac{\epsilon}{2})$ et $D_{eucl}(0, c_2) := D_2$
– $D(x, \epsilon)$ et $D_{eucl}(0, 1) := D_3$
– y et c_2
Par invariance conforme :

$$\mathbb{P}_y(T_{D(x,\beta e^{-2\lambda'' k})} \leq T_{\partial D(x,\epsilon)}) = \mathbb{P}_{c_2}(T_{D_1(k)} \leq T_{\partial D_3})$$

L'application exp envoie :
– la droite $\Delta_1(k)$ d'équation $x = \log(c_1 e^{-2\lambda'' k})$ sur $\partial D_1(k)$
– la droite Δ_2 d'équation $x = \log(c_2)$ sur ∂D_2
– la droite Δ_3 d'équation $x = 0$ sur ∂D_3
Par invariance conforme, on a :

$$\mathbb{P}_{c_2}(T_{D_1(k)} \leq T_{\partial D_3}) = \mathbb{P}_{\log(c_2)}(T_{\Delta_1(k)} \leq T_{\Delta_3}) = \frac{-\log(c_2)}{2\lambda'' k - \log(c_1)} \geq \frac{b}{k}$$

pour k assez grand et une certaine constante b

■

On a donc bien trouvé une constante $c = \frac{ab}{C^2}$ telle que pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand et pour tout $k > N$, on ait $\tilde{\mathbb{P}}(E_k \,/\, E_{k-1}^c, ...E_N^c) \geq \frac{c}{k}$.

Deuxième cas : $x \in D(\gamma.0, \delta + 2\epsilon)$ **:** Alors pour k assez grand, $D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \subset D(\gamma.0, \delta + 3\epsilon)$.

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_{N_1} = \gamma\})$$

$$\geq \tilde{\mathbb{P}}(\{c_1 \cap D(x, \beta e^{-2\lambda'' k}) \neq \varnothing\} \cap \{\gamma_1 = \gamma\} \cap \{\gamma_2 = \gamma\} \cap \{N_1 = 2\})$$

$$\geq \frac{1}{C^2}.(1 - \frac{C'}{C}).\mathbb{P}_\mu(T_{F_\gamma} \leq T_{\cup F_\alpha}).\inf_{y \in \partial F_\gamma} \mathbb{P}_y(T_{D(x,\beta e^{-2\lambda'' k})} \leq T_{\partial V_\gamma})$$
$$.\inf_{z \in \partial\partial V_\gamma} \mathbb{P}_z(T_{F_\gamma} \leq T_{\cup F_\alpha})$$

On conclut de la même manière que dans le premier cas en montrant que cette quantité est égale à $\frac{c}{k}$ pour une certaine constante c.

10 Preuve du théorème (1.5)

De même que pour prouver le théorème précédent, nous allons utiliser le processus de discrétisation de Furstenberg-Lyons-Sullivan. Pour simplifier les notations, prenons $x_0 = 0$. Soit $\tilde{\omega} = (\omega, \alpha) \in \Omega$. Le chemin ω s'écrit comme une concaténation infinie de chemins (remarquons que les notations sont légérement modifiées par rapport à la partie précédente) :

$$\omega = \beta_0 * \omega_0 * \omega_1 * ...$$

où $\beta_0 = \omega_{|[0,S_{N_0}]}$ et pour $k \geq 0$, $\omega_k = \omega_{|[S_{N_k},S_{N_{k+1}}]}$. Posons, pour $k \geq 0$, $c_k = X_{N_k}^{-1}.\omega_k$. On a alors :

$$\omega = \beta_0 * X_{N_0}c_0 * X_{N_1}c_1...$$

et par ρ-équivariance :

$$\mathscr{D}(\omega) = \mathscr{D}(\beta_0) * \rho(X_{N_0})\mathscr{D}(c_0) * \rho(X_{N_1})\mathscr{D}(c_1)...$$

Tout comme dans la preuve du théorème (1.3), la suite de variables aléatoires X_{N_k} est la réalisation d'une marche aléatoire droite dans $\Pi_1(\Sigma)$ de loi μ et la suite de variables aléatoires $Y_{N_k} = \rho(X_{N_k})$ est la réalisation d'une marche aléatoire droite dans $\rho(\Pi_1(\Sigma))$ de loi $\tilde{\mu} = \rho_*\mu$. La proposition (7.1) nous définit alors deux suites aléatoires d'éléments de $\mathbb{P}^1$: $y_k(\tilde{\omega})$ et $z_k(\tilde{\omega})$. Le théorème (7.2), définit un point aléatoire de $\mathbb{P}^1$: $z(\tilde{\omega})$. Et par la remarque (7.3), presque sûrement, $z_k(\tilde{\omega}) \to z(\tilde{\omega})$.

Remarquons que pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que pour $\tilde{\mathbb{P}}$-presque tout $\tilde{\omega} = (\omega, \alpha) \in \tilde{\Omega}$, pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot leb\,\{u \in [0,t] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(u)) \in D(z(\tilde{\omega}), \epsilon)\} = 1 \qquad (7)$$

Si on pose pour $k \geq 0$:

$$T_k(\tilde{\omega}) = leb\left\{t \in [S_{N_k}, S_{N_{k+1}}] \text{ tel que } \mathscr{D}(c_k(\tilde{\omega})(t)) \in D(y_k(\tilde{\omega}), e^{-\lambda' k})\right\}$$

et

$$\phi_n(\tilde{\omega}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_k(\tilde{\omega})$$

il nous suffit de montrer que presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0 \tag{8}$$

Montrons que (8) $\Rightarrow$ (7). D'après la proposition (8.3), il existe T tel que presque sûrement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{N_n}}{n} = T \tag{9}$$

Soit donc $\tilde{\omega}$ appartenant à l'ensemble de mesure pleine sur lequel (8) et (9) sont vérifiés. Soit $\epsilon > 0$. Par la remarque (7.3), $z_k(\tilde{\omega}) \to z(\tilde{\omega})$. Donc, il existe $I_0(\tilde{\omega})$ tel que $\forall k \geq I_0$, $D(z_k(\tilde{\omega}), e^{-\lambda' k}) \subset D(z(\tilde{\omega}), \epsilon)$. On a donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_k(\tilde{\omega}) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}\sum_{k=0}^{n-1} T_k(\tilde{\omega}) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}\sum_{k=I_0}^{n-1} leb \left\{ t \in [S_{N_k}, S_{N_{k+1}}] \text{ tel que } \mathscr{D}(c_k(\tilde{\omega})(t)) \in D(y_k(\tilde{\omega}), e^{-\lambda' k}) \right\}) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}\sum_{k=I_0}^{n-1} leb \left\{ t \in [S_{N_k}, S_{N_{k+1}}] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(t)) \notin D(z_k(\tilde{\omega}), e^{-\lambda' k}) \right\} \longrightarrow 0$$

par la proposition (7.1)

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}\sum_{k=I_0}^{n-1} leb \left\{ t \in [S_{N_k}, S_{N_{k+1}}] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(t)) \notin D(z(\tilde{\omega}), \epsilon) \right\} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}\sum_{k=1}^{n-1} leb \left\{ t \in [S_{N_k}, S_{N_{k+1}}] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(t)) \notin D(z(\tilde{\omega}), \epsilon) \right\} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}.leb \left\{ t \in [0, S_{N_n}] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(t)) \notin D(z(\tilde{\omega}), \epsilon) \right\}) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S_{N_n}}.leb \left\{ t \in [0, S_{N_n}] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(t)) \in D(z(\tilde{\omega}), \epsilon) \right\}) \longrightarrow 1$$

$$\Longrightarrow \limsup \frac{1}{t} \cdot leb \left\{ u \in [0, t] \text{ tel que } \mathscr{D}(\omega(u)) \in D(z(\tilde{\omega}), \epsilon) \right\} = 1 \Longrightarrow (7)$$

La dernière implication est due à (9). Nous devons maintenant montrer (8). Pour cela, nous allons majorer, pour k assez grand, $\mathbb{E}[T_k(\tilde{\omega})]$ par $\frac{1}{k}$. Nous commençons par une série de lemmes qui seront utiles par la suite (plusieurs de ces lemmes sont inspirés de [BHM] :

Lemme 10.1. *Pour $C_1 \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}^*$, définissons :*

$$B_k = \{\tilde{\omega} \textit{ tel que } S_{N_1}(\tilde{\omega}) > C_1.\log(k)\}$$

Pour C_1 assez grand, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\tilde{\mathbb{P}}(B_k) \leq \frac{a_0}{k^2}$$

Démonstration. Comme Σ est compacte, on peut montrer (voir [Pi]) qu'il existe a_1 et a_2 strictement positifs tel que pour tout $z \in V_e$:

$$\mathbb{P}_z(S_1 \geq r) \leq a_1 e^{-a_2 r} \tag{10}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(S_{N_1} \geq r) &= \sum_{k \geq 1} \tilde{\mathbb{P}}(S_k \geq r \cap N_1 = k) \\
&= \sum_{k \geq 1} \int_{S_k \geq r} \mathbb{1}_{N_1 = k} d\tilde{\mathbb{P}} \\
&= \sum_{k \geq 1} \int_{S_k \geq r} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{N_1 = k} | \omega] d\tilde{\mathbb{P}} \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{N_1 = k} | \omega).\mathbb{1}_{S_k \geq r}\right] \\
&\leq \sum_{k \geq 1} (1 - \frac{1}{C^2})^{k-1} \tilde{\mathbb{P}}(S_k \geq r)
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(.|\omega)$, $\tilde{\mathbb{P}}(.|\omega)$ désignent respectivement l'espérance et la probabilité conditionnelle sachant ω. La troisième égalité est dûe au fait que l'événement $S_k \geq r$ ne dépend que de la trajectoire brownienne ω et est indépendant de la suite α_n. Enfin, la dernière inégalité est dûe au fait que, presque sûrement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_{N_1=k}|\omega) &= \tilde{\mathbb{P}}(N_1 = k|\omega) \\
&\leq \tilde{\mathbb{P}}(N_1 \geq k|\omega) \\
&= \tilde{\mathbb{P}}\left(\cap_{n=1}^{k-1}\kappa_n(\omega) < \alpha_n|\omega\right) \\
&\leq \tilde{\mathbb{P}}\left(\cap_{n=1}^{k-1}\{\frac{1}{C^2} < \alpha_n\}|\omega\right) \\
&= \tilde{\mathbb{P}}\left(\cap_{n=1}^{k-1}\left\{\frac{1}{C^2} < \alpha_n\right\}\right) \\
&= \prod_{n=1}^{k-1}\tilde{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{C^2} < \alpha_n\right) \\
&= (1 - \frac{1}{C^2})^{k-1}
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov, on a pour tout $\lambda_0 > 0$

$$\tilde{\mathbb{P}}(S_k \geq r) = \mathbb{P}_0(S_k \geq r) \leq e^{-\lambda_0 r}\mathbb{E}[e^{\lambda_0 S_k}]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\lambda_0 S_k}] &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda_0\left(S_1 + \sum_{i=1}^{k-1} S_{i+1} - S_i\right)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\lambda_0 . S_1} . e^{\lambda_0 . (S_2 - S_1)} ... e^{\lambda_0 . (S_k - S_{k-1})}\right] \\
&\leq \left(\sup_{z \in V_e} \mathbb{E}_z\left[e^{\lambda_0 . S_1}\right]\right)^k
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant dûe à la propriété de Markov forte.
Pour tout $z \in V_e$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_z\left[e^{\lambda_0 . S_1}\right] &= 1 + \int_{u>0} e^u \mathbb{P}_z(S_1 \geq \frac{u}{\lambda_0})du \\
&\leq 1 + \int_{u>0} e^u a_1 e^{-a_2 \frac{u}{\lambda_0}} du \\
&= 1 + \frac{a_1}{\frac{a_2}{\lambda_0} - 1}
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie pour $\lambda_0 < a_2$

On obtient alors :

$$\tilde{\mathbb{P}}(S_{N_1} \geq r) \leq e^{-\lambda_0 r} \sum_{k \geq 1} (1 - \frac{1}{C^2})^{k-1} \left(1 + \frac{a_1}{\frac{a_2}{\lambda_0} - 1} \right)^k$$

La somme précédente est convergente à condition de prendre λ_0 suffisament proche de 0. Fixons donc un tel λ_0. Il existe alors une constante a_0 telle que :

$$\tilde{\mathbb{P}}(S_{N_1} \geq r) \leq a_0 \cdot e^{-\lambda_0 r}$$

En prenant $r = C_1 \log(k)$, on obtient :

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(S_{N_1} \geq C_1 \log(k)\right) \leq a_0 \cdot k^{-\lambda_0 C_1}$$

Pour C_1 assez grand, $\lambda_0 C_1 > 2$ et le lemme est démontré.

■

Lemme 10.2. *Pour $C_2 \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}^*$, définissons :*

$$A_k = \{\tilde{\omega} \text{ tel que } c_0(\tilde{\omega}) \cap D(0, C_2 \log(k))^c \neq \varnothing\}$$

Pour C_2 assez grand, il existe $a_3 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\tilde{\mathbb{P}}(A_k) \leq \frac{a_3}{k^2}$$

Démonstration. Si ω est une trajectoire brownienne, notons :

$$\xi_t = \sup_{0 \leq u \leq t} d(\omega(0), \omega(t))$$

Fixons $C_1 > 0$ de sorte que la conclusion du lemme (10.1) soit vérifiée. On a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(A_k) &\leq \tilde{\mathbb{P}}(A_k \cap \{S_{N_1} \geq C_1 \log(k)\}) + \tilde{\mathbb{P}}(A_k \cap \{S_{N_1} \leq C_1 \log(k)\}) \\
&\leq \tilde{\mathbb{P}}(S_{N_1} \geq C_1 \log(k)) + \mathbb{P}_0(\xi_{C_1 \log(k)} \geq C_2 \log(k))
\end{aligned}$$

Or, on a l'estimation suivante, valable pour un brownien définie sur une variété à courbure bornée (voir [P]) : il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{D}$ et pour tout $r \geq 2$, on ait $\mathbb{P}_y(\xi_1 \geq r) \leq e^{-cr^2}$. Donc, pour $\lambda_1 > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y[e^{\lambda_1\xi_1}] &= 1+\int_{u>0} e^u \mathbb{P}_y(\xi_1 \geq \frac{u}{\lambda_1})du \\ &\leq 1+\int_{u>0} e^{u-c\frac{u^2}{\lambda_1^2}}du\end{aligned}$$

La dernière intégrale est convergente. Soit $a_4(\lambda_1)$ la constante vérifiant $e^{a_4} = 1+\int_{u>0} e^{u-c\frac{u^2}{\lambda_1^2}}du$. En utilisant successivemnt l'inégalité de Markov et la propriété de Markov du Brownien, et en notant $Ent(t)$ la partie entière de t, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_t \geq r) &\leq e^{-\lambda_1 r}\mathbb{E}[e^{\lambda_1\xi_t}] \\ &\leq e^{-\lambda_1 r}\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1 . \sum_{k=0}^{Ent(t)-1} \sup_{k\leq s\leq k+1} d(\omega(k),\omega(s))}\right] \\ &\leq e^{-\lambda_1 r}.(sup_{y\in\mathbb{D}}\mathbb{E}_y[e^{\lambda_1\xi_1}])^t\end{aligned}$$

Pour $t = C_1\log(k)$ et $r = C_2\log(k)$, on obtient :

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\xi_{C_1\log(k)} \leq C_2\log(k)\right) \leq k^{-\lambda_1 C_2}.k^{a_4 C_1}$$

Et donc :

$$\tilde{\mathbb{P}}(A_k) \leq \frac{a_0}{k^2} + k^{-\lambda_1 C_2 + a_4 C_1}$$

Quitte à choisir C_2 suffisament grand, $-\lambda_1 C_2 + a_4 C_1 < -2$. Et donc, il existe $a_3 > 0$ tel que pour k assez grand, on ait : $\tilde{\mathbb{P}}(A_k) \leq \frac{a_3}{k^2}$.

■

Fixons une fois pour toutes une constante C_2 vérifiant le lemme précédent. On a :

Lemme 10.3. *Il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout k assez grand, on ait :*

$$Card\,\{\gamma \in \Pi_1(\Sigma) \text{ tel que } d(0,\gamma.0) \leq C_2\log(k)\} \leq k^{C_3}$$

Démonstration.

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}\log\left(Card\,\{\Pi_1(\Sigma).0 \cap D(0,r)\}\right) = \alpha > 0$$

Donc, il existe $\alpha' > \alpha$ et il existe $R > 0$ tel que pour tout $r \geq R$, on ait :

$$Card\,\{\Pi_1(\Sigma).0 \cap D(0,r)\} \leq e^{\alpha' r}$$

Donc, en prenant $r = C_2 \log(k)$ et pour k assez grand, on obtient :

$$Card\,\{\Pi_1(\Sigma).0 \cap D(0, C_2 \log(k))\} \leq e^{\alpha' C_2 \log(k)} = k^{\alpha' C_2}$$

$\blacksquare$

Lemme 10.4. *Il existe $C_4, C_4' \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $x \in D(0, C_2 \log(k))$, on ait :*

$$\frac{1}{k^{C_4}} \leq \mid \mathscr{D}'(x) \mid \leq k^{C_4'}$$

Démonstration. $\mid \mathscr{D}'(x) \mid$ désigne ici le module de la dérivé de $\mathscr{D}$ en x en considérant la métrique hyperbolique du disque au départ et sphérique à l'arrivée. Notons F le domaine fondamental de Dirichlet associé à l'action de $\Pi_1(\Sigma)$ sur $\mathbb{D}$, c'est à dire :

$$F = \{z \in \mathbb{D} \text{ tel que } \forall \gamma \in \Pi_1(\Sigma) \quad d(z,0) \leq d(z, \gamma.0)\}$$

Notons $\gamma_1, ...\gamma_d$ l'ensemble des $\gamma \in \Pi_1(\Sigma)$ tels que $F \cap \gamma F \neq \varnothing$. Le fait suivant est classique :

$\exists v > 0$ tel que $\forall x \in D(0,r)$, $\exists y \in F$, $\exists l \leq v.r$, $\exists i_1, ..., i_l \in \{1, ...d\}$ tels que $x = \gamma_{i_1} ... \gamma_{i_l} y$.

Soit $x \in D(0, C_2 \log(k))$. Il existe $i_1, ..., i_l \in \{1, ...d\}$ avec $l \leq v.C_2.\log(k)$ tel que $x = \gamma_{i_1} ... \gamma_{i_l} y$.

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(x) &= \mathscr{D}(\gamma_{i_1} ... \gamma_{i_l} y) \\ &= \rho(\gamma_{i_1}) ... \rho(\gamma_{i_l}).\mathscr{D}(y) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathscr{D}'(x) = (\rho(\gamma_{i_1}))'_{\rho(\gamma_{i_2})...\rho(\gamma_{i_l}).\mathscr{D}(y)} ... \rho(\gamma_{i_l})'_{\mathscr{D}(y)}.\mathscr{D}'(y)$$

Posons $b_1 = \sup_{y \in F} \mid \mathscr{D}'(y) \mid$ et $b_2 = \sup_{z \in \mathbb{P}^1, i=1...d} \mid \rho(\gamma_i)'(z) \mid$. Notons que $b_1 < \infty$ car le domaine de dirichlet F est compact (car Σ est compact).

On a :

$$\mid \mathscr{D}'(x) \mid \leq b_2^{v.C_2.\log(k)}.b_1 \leq k^{C_4'}$$

pour k assez grand.

Pour la minoration, on fait un raisonnement analogue en utilisant le fait que $\inf_{y\in F} \mid \mathscr{D}'(y) \mid > 0$ (car on a supposé que la structure projective était non branchée). ■

Cette série de lemmes va nous servir à montrer le résultat suivant :

Lemme 10.5. *Pour k assez grand, on a :*

$$\mathbb{E}[T_k] \leq \frac{1}{k}$$

Démonstration. Voici l'idée de la preuve : pour calculer $\mathbb{E}[T_k]$, on se ramène à peu de choses près, à évaluer, pour un brownien ω de loi initiale la mesure uniforme sur $\partial D(0,\delta')$ et arrété au temps aléatoire S_{N_1}, l'espérance du temps que $\mathscr{D}(\omega(t))$ passe dans un disque de rayon e^{-k} inclus dans $\mathbb{P}^1$. D'après l'invariance du brownien par l'application conforme $\mathscr{D}$, cela revient à évaluer l'espérance du temps qu'un brownien dans $\mathbb{P}^1$ arrété au temps $\sigma_\omega(S_{N_1})$ passe dans un disque de rayon e^{-k}. Les lemmes (10.1), (10.2) et (10.4) qui viennent d'etre démontrés vont servir à controler le temps S_{N_1} et le reparamétrage de temps $\sigma_{\omega(t)} = \int_0^t \mid \mathscr{D}'(\omega(u)) \mid^2 du$.

Commençons par quelques notations :

- $\mathbb{E}^A$ désigne l'espérance conditionnellement à l'événement A.
- $U_k(y,\tilde{\omega}) = leb\left(\{t \in [S_{N_0}, S_{N_1}] \text{ tel que } \mathscr{D}(c_0(\tilde{\omega}(t))) \in D(y, e^{-\lambda' k})\}\right)$.
- $\Omega_\gamma := \{\tilde{\omega} \text{ tel que } \gamma_{N_1}(\tilde{\omega}) = \gamma\}$.

$$\mathbb{E}[T_k] = \sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \mathbb{E}^{\gamma_{N_k}=\gamma}[T_k]\cdot\mu(\gamma)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\gamma_{N_k}=\gamma}[T_k] &\leq \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \mathbb{E}^{\gamma_{N_k}=\gamma}\left[leb\left\{t\in[S_{N_k}, S_{N_{k+1}}] \text{ tq } \mathscr{D}(c_k(\tilde{\omega})(t)) \in D(y, e^{-\lambda' k})\right\}\right] \\ &= \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \mathbb{E}^{\gamma_{N_1}=\gamma}[leb\left\{t\in[S_{N_0}, S_{N_1}] \text{ tq } \mathscr{D}(c_0(\tilde{\omega})(t)) \in D(y, e^{-\lambda' k})\right\}]\end{aligned}$$

L'inégalité de la première ligne est due au fait que $c_k(\tilde{\omega})$ et $y_k(\tilde{\omega})$ sont indépendants sachant $\gamma_{N_k} = \gamma$ et l'égalité de la seconde au fait que les $c_k(\tilde{\omega})$

sont identiquement distribués. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_k] &\leq \sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \mathbb{E}^{\gamma_{N_1}=\gamma}[U_k(y,\tilde{\omega})].\mu(\gamma) \\ &= \sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq \sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k^c\cap B_k^c} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})) \\ + \sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k\cap B_k} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega}))\end{aligned} \tag{11}$$

Majorons tout d'abord le second terme de cette somme : d'après la proposition 8.3, il existe $T > 0$ tel que presque sûrement, $\frac{S_{N_k}}{k}$ tende vers T. Donc, il existe $C > 0$ tel que presque sûrement, on ait pour tout $k \in \mathbb{N}*$: $S_{N_1} \leq Ck$. Or, par définition de U_k, on a $U_k \leq S_{N_1}$. Donc $U_k \leq Ck$. Et donc :

$$\sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k\cap B_k} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})) \leq (\tilde{\mathbb{P}}(A_k) + \tilde{\mathbb{P}}(B_k)) \cdot Ck$$

Donc, par les lemmmes (10.1)et (10.2), il existe une constante C_5 telle que :

$$\sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k\cap B_k} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})) \leq \frac{C_5}{k}$$

Majorons maintenant le premier terme de la somme dans l'équation (11)

$$\sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k^c\cap B_k^c} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})$$

$$\leq \sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k^c\cap B_k^c} \int_{S_{N_0(\tilde{\omega})}}^{S_{N_1(\tilde{\omega})}} \mathbb{1}_{\mathscr{D}(c_0(\tilde{\omega}(t))\in D(y,e^{-\lambda' k})} dt \quad d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})$$

$$= \sum_{d(0,\gamma.0)\leq C_2\log(k)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k^c\cap B_k^c} \int_{S_{N_0(\tilde{\omega})}}^{S_{N_1(\tilde{\omega})}} \mathbb{1}_{\mathscr{D}(c_0(\tilde{\omega}(t))\in D(y,e^{-\lambda' k})} dt \quad d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega})$$

à $\tilde{\omega} = (\omega, \alpha)$ fixé, faisons le changement de variable

$$s = \sigma_\omega(t) = \int_0^t \mid \mathscr{D}'(c_0(\tilde{w}(u))) \mid^2 du$$

On obtient que la quantité précédente est égale à :

$$= \sum_{d(0,\gamma.0)\leq C_2 \log(k)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k^c\cap B_k^c} \int_{\sigma_\omega(S_{N_0(\tilde{\omega})})}^{\sigma_\omega(S_{N_1(\tilde{\omega})})} \mathbb{1}_{\mathscr{D}(c_0(\tilde{\omega}(\sigma_\omega^{-1}(s)))\in D(y,e^{-\lambda' k})}$$
$$\cdot \frac{1}{\mid \mathscr{D}'(c_0(\tilde{\omega}(\sigma_\omega^{-1}(s))) \mid^2} ds \quad d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega}) \tag{12}$$

Or $\sigma_\omega(S_{N_0(\tilde{\omega})}) \geq 0$ et si $\tilde{\omega} \in \Omega_\gamma \cap A_k^c \cap B_k^c$, on a, d'après le lemme (10.4) :

$$\sigma_\omega(S_{N_1(\tilde{\omega})}) = \int_0^{S_{N_1(\tilde{\omega})}} \mid \mathscr{D}'(c_0(\tilde{w}(u))) \mid^2 du \leq C_1 \log(k).k^{2C_4'}$$

On a également, par le lemme (10.4) :

$$(\sigma_\omega^{-1})'(s) = \frac{1}{\mid \mathscr{D}'(c_0(\tilde{\omega}(\sigma_\omega^{-1}(s))) \mid^2} \leq k^{2C_4}$$

Avec les notations suivantes :
- m est la mesure image par $\mathscr{D}$ de la mesure riemannienne sur ∂V_e.
- $\mathbb{P}_m = \int_{\mathbb{P}^1} \mathbb{P}_x dm(x)$ ($\mathbb{P}_x$ est la mesure de Wiener).
- B_s est le processus brownien sur $\mathbb{P}^1$.

On obtient, par invariance conforme du brownien, que le terme (12) est majoré par le produit de

$$Card\,\{\gamma \in \pi_1(\Sigma) \text{ tel que } d(0,\gamma.0) \leq C_2 \log(k)\}$$

et de

$$\sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\mu} \int_0^{C_1 \log(k).k^{2C_4'}} \mathbb{1}_{B_s(\omega)\in D(y,e^{-\lambda' k})}.k^{2C_4} ds \quad d\mathbb{P}_m(\omega)$$

Donc d'après le lemme (10.3) et Fubini, on obtient que cette quantité est majorée par :

$$\leq k^{C_3}.k^{2C_4} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_0^{C_1 \log(k).k^{2C_4'}} \mathbb{P}_m(B_s \in D(y, e^{-\lambda' k}))ds$$

$$\leq k^{C_3}.k^{2C_4}.C_1 \log(k).k^{2C'_4} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \mathbb{P}_m(B_s \in D(y, e^{-\lambda' k})) \qquad (13)$$

Enfin, il n'est pas difficile de se convaincre que :

$$\sup_{y\in\mathbb{P}^1} \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \mathbb{P}_m(B_s \in D(y, e^{-\lambda' k})) \leq C_5 e^{-\frac{\lambda' k}{2}} \qquad (14)$$

On obtient ainsi une majoration pour le premier terme de la somme 11 : il existe une constante C_6 telle que pour k assez grand, on ait :

$$\sum_{\gamma\in\Pi_1(\Sigma)} \sup_{y\in\mathbb{P}^1} \int_{\Omega_\gamma\cap A_k^c\cap B_k^c} U_k(y,\tilde{\omega})d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\omega}) \leq \frac{C_6}{k}$$

Finalement, pour k assez grand, on a :

$$\mathbb{E}[T_k] \leq \frac{1}{k}$$

■

Il nous reste à déduire de ce dernier lemme que presque-sûrement $\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0$. Soit $\epsilon_0 > 0$,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\mid \phi_n - \mathbb{E}(\phi_n) \mid \geq \epsilon_0) \leq \frac{var(\phi_n)}{\epsilon_0^2}$$

Donc, si on montre que $var(\phi_n)$ est sommable, on aura par Borel-Cantelli que, presque-sûrement, pour n assez grand $\mid \phi_n - \mathbb{E}(\phi_n) \mid \leq \epsilon_0$ et finalement que, presque-sûrement $\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0$. Montrons donc que $var(\phi_n)$ est sommable :

$$\begin{aligned}
var(\phi_n) &= \frac{1}{n^2}.var(\sum_{k=0}^{n-1} T_k) \\
&= \frac{1}{n^2}.\left(\sum_{k=0}^{n-1} var(T_k) - 2.\sum_{0\leq i<j\leq n-1} cov(T_i,T_j)\right) \\
&\leq \frac{1}{n^2}.\sum_{k=0}^{n-1} var(T_k) + 2.\frac{1}{n^2}.\sum_{0\leq i<j\leq n-1} \mid cov(T_i,T_j) \mid
\end{aligned}$$

Or, $var(T_k) = \mathbb{E}(T_k^2) - (\mathbb{E}(T_k))^2$ et on montre de la même manière que précedemment que $\mathbb{E}(T_k^2) \leq \frac{1}{k}$. Donc $\frac{1}{n^2}.\left(\sum_{k=0}^{n-1} var(T_k)\right)$ est sommable.

$\mid cov(T_i, T_j) \mid \leq \mid \mathbb{E}(T_i.T_j) \mid + \mid \mathbb{E}(T_i) \mid . \mid \mathbb{E}(T_j) \mid$. On montre également, en reprenant la preuve de manière quasiment identique, que $\mid \mathbb{E}(T_i.T_j) \mid \leq \frac{1}{ij}$. D'où $\frac{1}{n^2}.\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \mid cov(T_i, T_j) \mid$ est sommable.

11 Application au prolongement analytique de germes d'holonomie de feuilletages

Dans cette section, nous considérons des feuilletages holomorphes singuliers (de dimension 1 complexe) sur des surfaces complexes et nous intéressons au prolongement analytique de germes d'holonomie de feuilletages entre sous variétés analytiques de dimension 1. Commençons par quelques définitions :

Definition 11.1. *Soit M une surface complexe de dimension 2. Un feuilletage holomorphe non singulier sur M de dimension 1 est la donnée d'un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sur M maximal pour les propriétés suivantes :*

1. $\cup_{i \in I} U_i = M$
2. *pour tout $i \in I$, $\varphi_i : U_i \to A_i \times B_i$ est un biholomorphisme entre l'ouvert U_i et le produit des 2 ouverts de $\mathbb{C}$: A_i et B_i*
3. *si (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont 2 éléments de l'atlas vérifiant $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ alors le changemnt de carte $\varphi_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est de la forme :*
$$\varphi_{ij}(z, w) = (\gamma_{ij}(z, w), \eta_{ij}(w))$$
où γ_{ij} et η_{ij} sont des fonctions holomorphes.

Definition 11.2. *Soit M une surface complexe de dimension 2. Un feuilletage holomorphe singulier sur M de dimension 1 est la donnée d'un feuilletage holomorphe non singulier sur $M - E$ où E est un ensemble discret de points.*

11.1 Germes d'holonomie de feuilletages

Soit M une surface complexe munie d'un feuilletage holomorphe singulier $\mathscr{F}$. Soient C_0, C_1 deux sous variétés analytiques de M de dimension 1 et L une feuille de $\mathscr{F}$ intersectant C_0 en p_0 et C_1 en p_1. Supposons de plus que p_0 et p_1 ne sont pas des singularités du feuilletage et que L intersecte C_0 et C_1 transversalement en p_0 et p_1. Soit $\gamma : [0, 1] \to L$ un chemin continu tel $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$. Alors pour tout $p \in C_0$ assez proche de p_0, on peut trouver une famille continue $\gamma_p : [0, 1] \to M$ de chemins paramétrée par le point $p \in C_0$ assez proche de p_0 vérifiant :

1. $\gamma_p(0) = p$
2. $\gamma_p(1) \in C_1$

3. $\gamma_{p_0} = \gamma$
4. Pour tout p, γ_p est contenu dans la feuille passant par p.

Le germe de l'application holomorphe $p \mapsto \gamma_p(1)$ en p_0 ne dépend pas du choix de la famille de chemins γ_p et est appelé germe d'holonomie associé à γ. En fait, ce germe ne dépend que de la classe d'homotopie (dans L) à extrémités fixes du chemin γ.

11.2 Une conjecture de Frank Loray

Considérons l'équation différentielle dans $\mathbb{C}^2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{15}$$

où P et Q sont deux polynomes premiers entre eux.

Les solutions de cette équation différentielle définissent un feuilletage holomorphe singulier par courbes complexes sur $\mathbb{C}^2$. Souvent, en regardant $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (resp $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$), on prolonge le feuilletage de $\mathbb{C}^2$ à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (resp $\mathbb{P}^2$).

Dans [L], F.Loray regarde le feuilletage défini par l'équation (15) dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et fait la conjecture suivante :

Conjecture 11.3. *Considérons le feuilletage dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ défini par l'équation (15). Soient 2 droites verticales L_1 et L_2 non invariantes par le feuilletage et un germe d'holonomie du feuilletage $h : (L_1, p_1) \to (L_2, p_2)$. Alors, l'ensemble des singularités de h pour le prolongement analytique est au plus dénombrable.*

Dans [CDFG], les auteurs exhibent de nombreux contre-exemples à l'aide de différentes méthodes. L'une d'entre elle est basée sur la construction standard du feuilletage associée à une structure projective et est l'objet de la section qui suit.

11.3 Construction de feuilletages holomorphes associés à une structure projective

Donnons nous une structure projective complexe (non branchée) sur une surface de Riemann Σ hyperbolique. Soit $\mathscr{D} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^1$ une application développante et $\rho : \Pi_1(\Sigma) \to PSl(2,\mathbb{C})$ une application de monodromie associée à cette structure projective. Notons $\Gamma = \rho(\Pi_1(\Sigma))$. On a l'action suivante :

$$\begin{aligned}\Pi_1(\Sigma) \times (\tilde{\Sigma} \times \mathbb{P}^1) &\longrightarrow \tilde{\Sigma} \times \mathbb{P}^1 \\ ((x,z),\alpha) &\longmapsto (x \cdot \alpha, \rho(\alpha)^{-1} \cdot z)\end{aligned}$$

Le quotient $M = (\tilde{\Sigma} \times \mathbb{P}^1)/\Pi_1(\Sigma)$ est une surface complexe qui est un fibré en $\mathbb{P}^1$ au dessus de Σ. Notons $\mathscr{F}$ le feuilletage suspension sur M défini comme le quotient par $\Pi_1(\Sigma)$ du feuilletage horizontal $\tilde{\mathscr{F}}$ sur $\tilde{\Sigma} \times \mathbb{P}^1$. La diagonale $\tilde{\Delta} = \{(x, \mathscr{D}(x)); x \in \tilde{\Sigma}\}$ de $\tilde{\Sigma} \times \mathbb{P}_1$ passe au quotient dans M en une courbe holomorphe Δ transverse au feuilletage $\mathscr{F}$ (car $\mathscr{D}$ est une submersion).

Soit $x_0 \in \Sigma$ et $p^{-1}(x_0)$ la fibre de $p : M \to \Sigma$ au dessus de x_0. Si on fixe $\tilde{x_0} \in \tilde{\Sigma}$ tel que $[\tilde{x_0}] = x_0$ (où $[\tilde{x_0}]$ est la classe de $\tilde{x_0}$ modulo l'action de $\Pi_1(\Sigma)$), on a une identification $\phi_{\tilde{x_0}}$ entre $p^{-1}(x_0)$ et $\mathbb{P}^1$. L'application $\phi_{\tilde{x_0}} : \mathbb{P}^1 \to p^{-1}(x_0)$, $z \mapsto [\tilde{x_0}, z]$ (où $[\tilde{x_0}, z]$ désigne la classe de $(\tilde{x_0}, z)$ modulo l'action de $\Pi_1(\Sigma)$). On a également une identification entre Σ et Δ : $[\tilde{x}] \mapsto [\tilde{x}, \mathscr{D}(\tilde{x})]$. Le germe de l'application $\Delta \to p^{-1}(x_0)$, $[\tilde{x}, \mathscr{D}(\tilde{x})] \mapsto [\tilde{x_0}, \mathscr{D}(\tilde{x})]$ en $[\tilde{x_0}, \mathscr{D}(\tilde{x_0})]$ est un germe d'holonomie du feuilletage. Via les identifications décrites plus hauts, ce germe correspond au germe de l'application multiforme : $(\Sigma, x_0) \to (\mathbb{P}^1, \mathscr{D}(\tilde{x_0}))$, $[\tilde{x}] \mapsto \mathscr{D}(\tilde{x})$.

Si h est un germe de section locale de $\mathscr{D}$, h est alors un germe d'holonomie du feuilletage construit plus haut à partir de $\mathscr{D}$:

$$h : p^{-1}(x_0) \longrightarrow \Delta$$

1. Si on choisit une surface de Riemann Σ munie de sa structure projective uniformisante (5.3), alors une application développante $\mathscr{D}$ est l'inclusion : $\mathscr{D} = i : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^1$. Ainsi, si h est un germe de section locale de $\mathscr{D}$, h a un bord naturel pour le prolongement analytique. (cf (6.3)).
2. Si Σ est munie d'une structure projective dont le groupe de monodromie est dense dans $PSl(2,\mathbb{C})$ et si h est un germe de section de $\mathscr{D}$, l'ensemble des singularités de h pour le prolongement analytique est plein d'après la proposition (6.3). Remarquons que le théorème (1.3) affirme que ce germe d'holonomie de feuilletage h se prolonge le long de presque toute trajectoire brownienne.

On a donc trouvé des feuilletages holomorphes (non singuliers) sur des fibrés en $\mathbb{P}^1$ au dessus d'une surface de Riemann et des germes d'holonomie du feuilletage dont l'ensemble des singularités pour le prolongement analytique soit a un bord naturel soit est plein. La variété M n'est pas une variété compacte. Dans [CDFG], les auteurs montrent que l'on peut obtenir les memes propriétés sur des feuilletages holomorphes singuliers de $\mathbb{P}^2$. Pour y parvenir, ils considèrent le feuilletage qui vient d'etre construit en choisissant pour Σ la sphère de Riemann privé de points ($\Sigma = \mathbb{P}^1 - \{p_1, ..., p_d\}$), puis étendent ce feuilletage aux fibres au dessus des p_i, obtiennent alors un feuilletage holomorphe singulier de la première surface de Hirzebruck qu'ils blow down pour obtenir $\mathbb{P}^2$. Plus précisément :

Théorème 11.4. *[CDFG] il existe un feuilletage holomorphe de $\mathbb{P}^2$ dans chacune des familles suivantes :*

1. *feuilletages ayant un germe d'holonomie entre 2 lignes algébriques dont le prolongement analytique a un bord naturel*
2. *feuilletages ayant un germe d'holonomie entre 2 lignes algébriques dont le prolongement analytique a un ensemble plein de singularités*

Démonstration. On pourra se référer à l'article pour plus de détails. On part de $\Sigma = \mathbb{P}^1 - \{p_1, ..., p_d\}$, et d'une structure projective de type parabolique sur Σ (voir la définition (5.4)). Pour chacune des deux parties du théorème, on commence par construire une structure projective sur Σ de type parabolique.

1. Pour la première partie, la structure projective de type parabolique est construite de la manière suivante : on prend $\Sigma = \mathbb{P}^1 - \{p_1, ..., p_d\}$ $(d \geq 3)$. Prenons un polygône à d côtés dans le disque de Poincaré $\mathbb{D}$ dont les côtés sont des arcs de cercle (euclidien) notés C_i $(i = 1, ..., d)$ perpendiculaires au bord de $\mathbb{D}$ et dont les sommets sont dans le bord de $\mathbb{D}$. Pour $i = 1, ..., d$, notons r_i la réflexion par rapport à C_i et $\rho_i = r_i \circ r_{i+1}$ (avec la convention $r_{d+1} = r_1$). Si Γ est le groupe engendré par les ρ_i, l'application $\mathbb{D} \to \mathbb{D}/\Gamma$ est un revêtement universel de Σ. Considérons la structure projective définie par $\mathscr{D} = i : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$. $\mathscr{D}$ est, par construction de type parabolique.
2. Pour la seconde partie, on prend $\Sigma = \mathbb{P}^1 - \{p_1, ..., p_d\}$ $(d \geq 4)$. Par la proposition (5.5), il existe sur Σ une structure projective de type parabolique.

Rappelons que, pour une structure projective de type parabolique, pour chaque p_i, dans une coordonnée w identifiant le voisinage p_i avec le disque épointé $\mathbb{D}^*$, l'application développante est donnée par $\mathscr{D}(w) = \frac{1}{2i\pi}\log(w)$.

Ainsi, la fibration $p : M \to \Sigma$ est défini au voisinage de p_i comme le quotient de $\mathbb{H} \times \mathbb{P}^1$ par l'action $(x, z) \to (x + 1, z + 1)$ où $x = \frac{1}{2i\pi} \log(w)$, le feuilletage est le quotient du feuilletage horizontal et la courbe Δ le quotient de la diagonale.

On voudrait étendre la fibration au dessus du disque épointé qui vient d'etre décrite en une fibration au dessus du disque. Pour cela, on considère pour $n \geq 0$ l'équation :

$$wdt + (w^n - nt)dw = 0 \tag{16}$$

où $(w, t) \in \mathbb{D} \times \mathbb{P}^1$. Le feuilletage induit par cette équation a une singularité $(0, \infty)$ si $n = 0$ et 2 singularités $((0, 0)$ et $(0, \infty))$ si $n > 0$. La droite d'équation $w = 0$ est invariante pour le feuilletage. Dans la coordonnée $x = \frac{1}{2i\pi w} \log(w)$, l'équation devient : $\frac{dt}{dx} = \frac{nt - e^{2i\pi nx}}{2i\pi}$ dont les solutions sont $t(x) = \frac{cste - x}{2i\pi}.e^{2i\pi nx}$. Ainsi l'application $(x, z) \mapsto (x, t = \frac{(z-x)e^{2i\pi nx}}{2i\pi})$ induit un biholomorphisme entre $p^{-1}(\mathbb{D}^*)$ et $\mathbb{D}^* \times \mathbb{P}^1$ envoyant la fibration verticale sur elle-même, le feuilletage $\mathscr{F}$ sur le feuilletage défini par l'équation (16) et la diagonale Δ sur la droite d'équation $t = 0$.

Ainsi, on peut recoller au dessus de chaque cusp p_i la fibration définie par l'équation (16). On obtient alors une surface S fibré en $\mathbb{P}^1$ au dessus de $\mathbb{P}^1$ munie d'un feuilletage $\mathscr{G}$ ayant les propriétés suivantes : les d fibres au dessus des p_i sont invariantes pour le feuilletage et tout autre fibre est transverse au feuilletage. La section Δ au dessus de $\mathbb{P}^1 - \{p_1, ..., p_d\}$ se compactifie en une section Δ' au dessus de $\mathbb{P}^1$. Un calcul (fait dans [CDFG]) du nombre d'auto-intersection Δ'^2 de cette section donne :

$$\Delta'^2 = 2 + \sum_{i=1}^{d} n_{p_i} - 1 \tag{17}$$

où chaque n_{p_i} est l'entier n choisi dans l'équation 16 correspondant au recollement au dessus du cusp en p_i.

Si on prend $n_{p_1} = 0$ et $n_{p_i} = 1$ pour $i \neq 1$, on obtient par l'équation (17) que le nombre d'auto-intersection de la section Δ' est égale à 1 et donc que la surface S est la première surface de Hirzebruck $\mathbb{F}^1$. Le feuilletage $\mathscr{G}$ sur S posède un germe d'holonomie $p^{-1}(x_0) \to \Delta'$ dont l'ensemble des singularités pour le prolongement analytique :

1. a un bord naturel dans le premier cas
2. est égale à $p^{-1}(x_0)$ dans le deuxième cas

Blow down envoie S sur $\mathbb{P}^2$, le feuilletage $\mathscr{G}$ sur un feuilletage holomorphe singulier de $\mathbb{P}^2$ et $p^{-1}(x_0)$ et Δ' sur 2 lignes algébriques L_0 et L_1 ayant les propriétés voulues. ■

Notons que, bien que le germe d'holonomie du feuilletage construit dans le deuxième partie du théorème a un ensemble de singularités plein, celui-ci se prolonge le long de presque toute trajectoire brownienne d'après le théorème (1.3).
Les feuilletages de $\mathbb{P}^2$ construits dans la preuve du théorème précédent sont des feuilletages de Riccati. Le théorème que nous allons montrer (théorème (1.7)) dit que, plus généralement, pour tout feuilletage de Riccati, une large classe de germes d'holonomie du feuilletage se prolonge le long de presque toute trajectoire brownienne. Nous commençons par une sous-section sur les feuilletages de Riccati :

11.4 Feuilletages de Riccati

Donnons nous un feuilletage de Riccati de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. De tels feuilletages sont définis par une équation du type :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x) + b(x)y + c(x)y^2}{p(x)} \tag{18}$$

où a, b, c et p sont des polynomes. Le feuilletage holomorphe singulier défini dans $\mathbb{C}^2$ par l'équation (18) se prolonge en un feuilletage holomorphe singulier de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Il est évident que, si x est un zéro de p, la droite $\{x\} \times \mathbb{P}^1$ est invariante pour le feuilletage. Si x n'est pas un zéro de p et $x \neq \infty$, alors la droite $\{x\} \times \mathbb{P}^1$ est transverse au feuilletage : cette transversalité est évidente en tout point (x, y) de $\{x\} \times \mathbb{C}$. Et pour étudier la transversalité au point (x, ∞), on fait le changement de coordonnées $y = \frac{1}{Y}$, l'équation 18 devient alors :

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{a(x)Y^2 + b(x)Y + c(x)}{p(x)}$$

Comme $\frac{dY}{dx}(x, 0) \neq \infty$, on a bien que la droite $\{x\} \times \mathbb{P}^1$ est transverse au feuilletage au point (x, ∞). Quant à la droite verticale $\{\infty\} \times \mathbb{P}^1$, on peut vérifier, grâce au changement de coordonnées $x = \frac{1}{X}$ qu'elle est invariante pour le feuilletage si et seulement si $deg(p) < max(deg(a), deg(b), deg(c)) + 2$ et que dans le cas contraire elle est transverse au feuilletage.

La transversalité d'une fibre générique de la projection dans le premier facteur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ caractérise les feuilletages de Riccati dans le sens où réciproquement, si pour un feuilletage donnée par une équation du type $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, il existe une droite verticale $\{x_0\} \times \mathbb{P}^1$ qui soit transverse au feuilletage, alors l'équation de départ est de type Riccati (équation 18). Cette transversalité d'une fibre générique permet de définir une représentation d'holonomie du feuilletage de la manière suivante : soit $\{a\} \in \mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}$ où $\{x_1, ..., x_n\}$ sont les points de $\mathbb{P}^1$ tels que $\{x_i\} \times \mathbb{P}^1$ est invariante pour le feuilletage. Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}$ un lacet dans $\mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}$ basé en a. Soit $y \in \mathbb{P}^1$. Il existe un unique chemin $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ relevant α, contenu dans la feuille passant par (a, y) et vérifiant $\tilde{\alpha}(0) = (a, y)$. Notons $\tilde{\alpha}(1) = (a, \phi_\alpha(y))$. L'application $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, y \mapsto \phi_\alpha(y))$ est un biholomorphisme de $\mathbb{P}^1$ (une transformation de Mobiüs) et ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet α. On a donc défini une représentation :

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}, a) \longrightarrow PSl(2, \mathbb{C})$$

appelée représentation de monodromie du feuilletage. Le groupe $\Gamma := \rho(\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}, a))$ est appelé le groupe de monodromie.

Remarque 11.5. *J'ai donné ici la définition la plus basique des feuilletages de Riccati : feuilletages de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ définis par l'équation (18). Par extension on définit les feuilletages de Riccati sur les surfaces complexes fibrées en $\mathbb{P}^1$ au dessus de $\mathbb{P}^1$ comme les feuilletages qui sont transverses à une fibre générique. Au sens de cette définition, le feuilletage $\mathscr{G}$ défini sur la première surface de Hirzebruck $\mathbb{F}^1$ dans la preuve du théorème (11.4) est un feuilletage de Riccati. Le théorème (1.7) s'étend sans peine aux feuilletages de Riccati au sens de cette définition généralisée*

11.5 Preuve du théorème (1.7)

Il s'agit en fait d'une simple application du théorème (1.3). L'idée est la suivante : le feuilletage munit naturellemnt les deux courbes holomorphes $C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$ d'une structure projective branchée. Si les applications développantes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ associées à ces structures projectives sont bien choisies, alors tout germe h d'holonomie du feuilletgage entre $C_1 - \{\sigma_1(x_1), ..., \sigma_1(x_n)\}$ et $C_2 - \{\sigma_2(x_1), ..., \sigma_2(x_n)\}$ s'écrit : $h = \mathscr{D}_2^{-1} \circ \mathscr{D}_1$. On conclut alors grace au théorème (1.3).

Plus précisément, donnons nous deux sections σ_1 et σ_2 de la fibration verticale. Pour $i \in \{1,2\}$, la courbe complexe $\sigma_i(\mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\})$ est biholomorphe à $C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$ et est munie naturellement d'une structure projective branchée : elle est obtenue en transportant l'unique structure projective de la fibre $\{a\} \times \mathbb{P}^1$ le long des feuilles du feuilletage. Les points de branchement correspondent aux points de $C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$ où le feuilletage est tangent à $C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$.

Construisons explicitement une application développante associée à cette structure projective. Si $\alpha : [0,1] \to \mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}$ est un chemin continu joignant a et x ($\alpha(0) = a$ et $\alpha(1) = x$), il existe un unique chemin $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ relevant α, contenu dans la feuille passant par $(x, \sigma_i(x))$ et vérifiant $\tilde{\alpha}(1) = (x, \sigma_i(x))$. La valeur $\tilde{\alpha}(0)$ ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin α partant de a et me définit donc une application

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_i : \mathbb{P}^1 - \widetilde{\{x_1, ..., x_n\}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [\tilde{\alpha}] &\longrightarrow \tilde{\alpha}(1) \end{aligned}$$

Notons que, par construction $\mathscr{D}_i$ est ρ-équivariante. Le fait que Γ agisse de manière minimale sur $\mathbb{P}^1$ implique que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont surjectives (car $im(\mathscr{D}_i)$ est un ouvert Γ-invariant). De plus Γ ne contient pas de sous-groupes réductibles d'indice fini. On en déduit que Γ n'est pas un groupe abélien et donc que $C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$ est une surface de Riemann de type hyperbolique. Si Γ est non compacte, alors toutes les hypothèses du théorème (1.3) sont vérifiées. Si Γ est compacte, alors Γ est conjugué à un sous groupe du groupe projective spécial unitaire $PSU(2, \mathbb{C})$, cas dans lequel il n'est pas difficile de se convaincre que la conclusion du théorème (1.3) reste valide.

Munissons maintenant la surface $C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$ (biholomorphe à $\mathbb{P}^1 - \{x_1, ..., x_n\}$) de son unique métrique (notée hyp_i) à courbure -1 dans sa classe conforme. L'inclusion $(C_i - \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}, hyp_i) \hookrightarrow (C_i, sph_i)$ préserve le brownien et le reparamétrage de temps σ donné par le théorème (3.10) vérifie $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma_t = \infty$. On peut donc supposer que l'on considère des trajectoires browniennes sur C_1 partant de $p_1 \notin \{\sigma_i(x_1), ..., \sigma_i(x_n)\}$ et associées à la métrique hyp_1.

Si $h : (C_1, p_1) \to (C_2, p_2)$ est un germe d'holonomie du feuilletage. $h = h_2 \circ germe(\mathscr{D}_1)$ où h_2 est un germe de section locale de $\mathscr{D}_2$ en $\mathscr{D}_1(p_1)$. Si on fait partir un brownien ω de p_1, $\mathscr{D}_1$ se prolonge le long de ω et par invariance conforme, après reparamétrage de temps, $\mathscr{D}_1 \circ \omega$ est un brownien (défini pour tout temps positif par le théorème (1.3)) partant de $\mathscr{D}_1(p_1)$. Encore par le même théorème, h_2 se prolonge le long de $\mathscr{D}_1 \circ \omega$.

Références

[Al] A. Alvarez *discretization of harmonic measures for foliated bundles* arxiv :1206.5690v1, 25 juin 2012

[As] T. Asuke *A Fatou-Julia decomposition of transversally holomorphic foliations.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Vol. 60 (2010), p1057-1104

[B] M. Brunella *A Global Stability Theorem for Transversaly Holomorphic Foliations.* Annals of Global Analysis and Geometry (1997) :15 p179-186

[Bou] P.Bougerol *Produit de matrices aléatoires indépendantes* cours

[BE] P. Baird and J. Eels. *A conservation law for harmonic maps.* Geometry Symposium, Utrecht 1980, Lecture Notes in Math, no. 894, Springer, 1981, pp. 1-25

[BCD] A. Bernard, E.A. Campbell, A.M. Davie. *Brownian motion and generalized analytic and inner functions.* Ann. Inst. Fourier 29, 207-228 (1979)

[BHM] S.Blachère, P.Haïssinski, P.Mathieu. *Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups* arxiv

[CDFG] G. Calsamiglia, A. Guillot, B. Deroin, S. Frankel. *Singular sets of holonomy maps for algebraic foliations.* Journal of European Mathematical Society En presse

[CC1] A. Candel, L.Conlon. *Foliations 1.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000

[CC2] A. Candel, L.Conlon. *Foliations 2.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000

[D] R.W.R. Darling *Martingales in manifolds. Definition, examples and behaviour under maps* Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome S16 (1982), p217-236

[Da] B. Davis *Picard's theorem and brownian motion.* Trans.Amer.Math.Soc., 213 (1975) p353-363

[Du] F. Duheille *Etude probabiliste des morphismes harmoniques à valeurs dans un espace euclidien* Thèse de doctorat de l'université Claude Bernard-Lyon 1 (1992)

[Dum] David Dumas *Complex projective structures.* In Handbook of Teichmuller theory, Vol 2, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., p455-508, (2009)

[DK] B. Deroin, V. Kleptsin *Random Conformal Dynamical Systems.* Geometric Functional Analysis 17 no. 4 (2007), p1043-1105

[Fug] B. Fuglede. *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds.* Ann.Inst.Fourier 28.2 (1978), 107-144

[Furm] A. Furman. *Random walks on groups and random transformations.* Handbook of dynamical systems, Vol 1.A, North-Holland, Amsterdam (2002), p931-1014

[Fur] H. Furstenberg. *Noncommuting random products.* Trans.Am.Math.Soc. 108 (1963), p377-428

[Fur2] H. Furstenberg. *Random walks and discrete subgroups of Lie groups.* (1971) Advances in Probability and Related Topics, vol.1, p1-63.

[Ga] L. Garnett. *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion.* J. Funct .Anal (1983) p285-311

[Gh] E. Ghys. *Topologie des feuilles génériques.* Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 2, 387-422

[GGS] E.Ghys, X.Gomez-Mont, J.Saludes *Fatou and Julia components of transversaly holomorphic foliations.* Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2, 287-319, Monogr. Enseign. Math., 38, Enseignement Math., Geneva, 2001.

[H] E.P. Hsu *S*tochastic analysis on manifolds Graduate studies in mathematics, vol 38 (AMS)

[KL] A. Karlsson, F. Ledrappier : *Propriété de Liouville te vitesse de fuite du mouvement brownien.* C.R.Acad.Sci.Paris,Sér.1 344(2007),685-690

[KF] H. Kesten, H. Furstenberg : *Products of random matrices.* Ann.Math.Stat.31 (1960), 457-469.

[Le] P. Lévy : *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier-Villars, Paris (1948)

[L] F. Loray : *sur les théorèmes 1 et 2 de Painlevé* Contemporary Mathematics 389 (2005), p. 165-190

[LM] F.Loray, D. Marin *Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces* Astérisque 323 (2009) p.223-252.

[LS] T. Lyons, and D. Sullivan . *Function theory, random paths and covering spaces.* J. Diferential Geom. 19 (1984), p299-323

[Ma] F. Mathéus *Probabilités et géométrie dans certains groupes de type fini* thèse H.D.R.

[Mo] P. Molino *Riemannian foliations* Progress in Mathematics, 73 (1988)

[Pi] M.Pinsky *Stochastic Riemannian Geometry.* Probabilistic Analysis and Related Topics,ed.A.T.Bharucha-Reid (Academic Press, 1978), p199-236.

[P] J.J Prat *Etude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative* C.R.Acad.Sci.Paris Sér.A-B 280(1975),no.22,p1539-1542

[S] D. Sullivan *Conformal dynamical systems* Geometric Dynamics, Springer Lecture Notes 1007 (1983), p725-752

[S2] D. Sullivan *A homological characterisation of foliations consisting of minimal surfaces* Comment.Math.Helvetici 54 (1979) p218-223

[U] H. Urakawa *Calculus of variations and harmonic maps.* translations of mathematical monographs, vol 132 (AMS, Providence, RI, 1993)

[W] J.C. Wood *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds.* (2003)

[Wo] W. Woess *Boundaries of random walks on graphs and groups with infinitely many ends.* Israel J. Math. 68 (1989), no. 3, p271-301